Gilberto de Miranda Junior

Localização de Servidores e Projeto de Redes com Custos de Interdependência e Congestionamento

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência da Computação.

Belo Horizonte

Maio de 2004

Para meus pais, minha esposa e minha filha.

Resumo

Neste trabalho, formulações de programação matemática são desenvolvidas para modelos de localização, modelos de projeto de redes congestionadas e a integração de ambos. Problemas de localização e de projeto de redes surgem em diversas aplicações das áreas de Ciência da Computação, Engenharia e Economia. Até hoje, tais problemas não podem ser resolvidos eficientemente, daí a principal motivação do trabalho. Estabelecida a relevância de tais problemas, tenta-se expandir as fronteiras de solução dos mesmos, utilizando-se formulações de fluxos e decomposição de Benders. O principal objetivo é solucionar programas lineares inteiros mistos de grande escala como *Quadratic Assignment Problem* e *Uncapacitated Hub Location Problem*, e também atacar programas não lineares inteiros mistos de grande escala. Extensa experimentação computacional foi conduzida, e os resultados são analisados e discutidos, tornando possível avaliar a qualidade da aproximação proposta.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho, e em especial ao Professor Henrique Pacca Loureiro Luna, por ter acreditado em minha capacidade sem sequer me conhecer, por ter tido paciência quase infinita nas horas difíceis, por ter sempre motivado, ajudado e valorizado meu trabalho. Agradeço a todos os amigos do *LaPO*, ao Professor Geraldo Robson Mateus, aos amigos Ricardo Poley, Gustavo da Gama Torres, João Fernando Sarubbi, Ricardo Camargo, e a todos do Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação. Agradeço também ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) pelo imprescindível suporte financeiro.

Sumário

Lista de Figuras **xi**

Lista de Tabelas **xiii**

1 Motivação e Contexto **1**
1.1 A Localização de Atividades Econômicas 1
1.2 O Projeto de Redes Locais 2
1.3 Localização de Facilidades e Projeto de Redes 3

2 Problemas de Atribuição **5**
2.1 Fundamentos Teóricos 5
2.2 O Problema de Atribuição Linear 6
2.3 O Problema Quadrático de Atribuição 6
2.3.1 Formulações Alternativas, Linearizações e Limites para o QAP . . . 6
2.3.2 Formulações de Fluxos Para o QAP 7
2.3.3 Uma Primeira Experiência Computacional 9
2.4 Um esquema de Decomposição de Benders 9
2.4.1 Subproblemas 11
2.4.2 Aprimorando a Decomposição de Benders com Restrições de Equilíbrio de Fluxos 13
2.5 Experiência Computacional com a Decomposição de Benders Aprimorada . 17

3 Localização de Componentes Eletrônicos e Efeitos Térmicos **27**
3.1 Introdução 27
3.2 Modelagem Térmica e Custos de Penalização sobre Temperaturas 28
3.2.1 Temperatura Máxima e Custos de Penalização 29
3.3 Experiência Computacional 31

4 Projeto de Redes com Custos de Congestionamento **39**
4.1 Introdução 39
4.2 Uma Formulação de Fluxos Multiproduto 39
4.2.1 Variáveis e Parâmetros 40
4.2.2 Um Programa Não-Linear Inteiro Misto 41
4.2.3 Theoretical Properties of the Linear and the Concave Versions . . . 41
4.2.4 Convexificação dos Custos de Alocação de Banda e Congestionamento 41
4.3 Decomposição de Benders 42
4.3.1 Manipulando o Problema 42
4.3.2 Subproblemas 44
4.3.3 Problema Mestre 46
4.3.4 Algoritmo 47
4.3.5 Evitando ciclos 47
4.4 Resultados Computacionais 48
4.5 Conclusões 48

5 Integrando Localização de Facilidades e Projeto de Redes **55**
5.1 Introdução 55
5.2 Formulações de Programação Matemática 56
5.2.1 Detalhando o Projeto da Rede Local 59
5.2.2 Modelo Generalizado Incluindo Transbordo entre Servidores e Desenho de Rede 61
5.3 Experiências Computacionais 62
5.3.1 Resultados para o *p-Hub Median Problem* e o *Uncapacitated Hub Location Problem* 63
5.3.2 O Modelo Integrado: QAP + Projeto de Rede Local com Custos de Congestionamento 63
5.3.3 Testes para o Modelo de Transbordo entre Servidores e Desenho de Rede 63
5.4 Conclusões 63

6 Conclusões **69**
6.1 Sumário das Contribuições da Tese 69
6.2 Conclusões 69

Referências Bibliográficas **71**

Lista de Figuras

2.1 Different representations of assignments. 5
2.2 Comparison of linear programming bounds for both formulations. 13
2.3 Comparison of lp computing times for both formulations. 14
2.4 Comparison of mip computing times for both formulations. 15
2.5 Comparison of mip computing times for both formulations. 16
2.6 Comparison of mip computing times for both formulations. 17
2.7 Comparison of mip computing times for both formulations. 18
2.8 An example of automatic construction of a feasible solution for the dual subproblem. 18
2.9 Evolution of computing times with p/q ratio. 23
2.10 Evolution of computing times with p/q ratio. 24
2.11 Evolution of computing times with p/q ratio. 25

3.1 *QAP* instance and Finite Volume Grid representation. 30
3.2 The penalty overheating cost function, for a threshold temperature of 85 Celsius. 31
3.3 Evolution of bounds during the method execution. 32
3.4 Number of Benders iterations versus p/q cost reason. 32
3.5 Execution time [s] versus p/q cost reason. 37
3.6 Temperature field for *ste36a* placement solution without overheating penalty. 37
3.7 Temperature field for *ste36a* placement solution considering overheating penalty. 38

4.1 The tree network design problem. 40
4.2 An example of convexified integrated leasing and congestion cost function. 42

5.1 Hub-and-spoke system with different kinds of local access networks. 56
5.2 Possible routes for the commodity ij for a given $x = x^h$. 58
5.3 A city partitioned in regions 64
5.4 A feasible solution 65

Lista de Tabelas

2.1 Linear programming bounds for both formulations under comparison and respective computing times. 10
2.2 Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and a comparison of integer mixed programming computing times. 11
2.3 Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and a comparison of mixed integer programming computing times. 12
2.4 Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and a comparison of mixed integer programming computing times. 19
2.5 Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and computing times for Benders decomposition. 20
2.6 Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and computing times for Benders decomposition. 21
2.7 Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and computing times for Benders decomposition and flow formulation. 22
2.8 Evolution of computing times for Benders algorithm and the flow formulation 22
2.9 Evolution of computing times for Benders algorithm and the flow formulation 23
2.10 Solution of larger instances using the Benders algorithm. 24

3.1 Thermo-physical properties for the thermal model. 29
3.2 Test instances for computational experiments. 33
3.3 Results for computational experiments - first set. 34
3.4 Results for computational experiments - second set. 35
3.5 Results for computational experiments - third set. 36

4.1 Network Dimensions for Test Problems. 49
4.2 Average computing time, number of Benders iterations and number of cycle avoiding constraints for experiments 1 to 5. 50
4.3 Average computing time, number of Benders iterations, Nonlinear/linear gap and number of different arcs for experiments 1 to 5. 51
4.4 Computing time, number of Benders iterations, number of cycle avoiding constraints for experiment 6. 52
4.5 Computing time, number of Benders iterations, and Nonlinear/linear gap for experiment 6. 53

5.1 Benders decomposition for the p-Hub Median Problem. 66
5.2 Benders decomposition for the Uncapacitated Hub Location Problem. 67
5.3 Computational results for the integrated model. 68
5.4 Report for a brief experiment using the Hub Transshipment Network Design model. 68

Capítulo 1

Motivação e Contexto

1.1 A Localização de Atividades Econômicas

A alocação eficiente de recursos indivisíveis responde pelo progresso de áreas importantes da análise econômica. Há problemas práticos que se pode citar. Por exemplo, a determinação do número adequado de máquinas-ferramentas dos mais diversos tipos em uma planta fabril, ou a alocação ótima de capacidades e freqüências em redes de telecomunicação.

Além disso, a indivisibilidade de fatores de produção altamente especializados é sempre fundamental quando se considera retorno sobre as escalas de produção. O forte interesse acerca dos efeitos da indivisibilidade vem do seguinte fato: se o retorno sobre as escala de produção persiste em um nível de produtividade da ordem da demanda total num respectivo mercado, perde-se a competição perfeita e a eficiência de alocação de recursos do sistema de preços associado. Em suma, a teoria econômica depende das indivisibilidades para melhor explicar a realidade. Tais indivisibilidades são responsáveis por alguns dos maiores desafios matemáticos contemporâneos. Tais idéias foram apresentadas por Koopmans e Beckmann em 1957 [75].

É possível elaborar uma extensa lista das aplicações práticas de problemas de localização. Pode-se citar, por exemplo, a determinação da melhor localização de centros de produção em uma rede de transporte multiproduto, ou a melhor localização de centros de distribuição e depósitos, conhecida a localização de fornecedores e clientes. De um modo geral, pode-se dizer que se por um lado a minimização de custos fixos e operacionais associados ao processo produtivo aumenta a competitividade de qualquer organização, por outro melhora a qualidade dos serviços prestados ao público, maximizando benefícios sociais.

Todos os sistemas de distribuição que têm características de eixo-e-raio (do inglês, *"Hub-and-Spoke Systems"*) são bons candidatos a estudos locacionais. As facilidades em tais sistemas são responsáveis por concentrar e redirecionar o tráfego de produtos, e serão chamadas de *servidores*. Elas são um recurso indivisível responsável por prover localmente o acesso a um dado serviço, estando conectadas a outros servidores por uma rede de transporte. O produto em trânsito em tal rede pode ser água, combustível, energia elétrica ou informação. O que define portanto se um dado servidor é um mero concentrador ou uma complexa estação é o produto em questão e a tecnologia de transporte associada.

Diversos pesquisadores estão estudando problemas locacionais. Para uma boa revisão da literatura disponível, deve-se observar os trabalhos clássicos de Koopmans and Beckmann[75], Motzkin [96], Losch [80], Kuhn [77], Mills [95], Samuelson [118] e Heffley [60]. Mais recentemente cita-se Beasley [14], Christofides e Beasley [36], França e Luna [44], Mateus e Luna [90], Aikens [2], Mateus and Thizy [92], Burkard [23], Balas e Saltzman[11], Burkard e Cela [27], Burkard, Cela, Pardalos e Pitsoulis [28], Cela [26], Anstreicher [4], Anstreicher e Brixius [5], Anstreicher, Brixius, Goux e Linderoth [6].

1.2 O Projeto de Redes Locais

Definida a localização dos servidores, surge a questão sobre como projetar a rede local através da qual se dará a interconexão entre clientes finais e servidor. Na maioria dos casos, a qualidade do projeto da rede de acesso responde por grande parcela do custo total. Problemas de projeto de redes têm extensa aplicação nas áreas de redes de computadores e sistemas de telecomunicações, explorando questões como desenho topológico, atribuição de capacidades e roteamento [21, 46, 91].

A organização hierárquica de tais redes tem papel fundamental desde que a concentração eficiente de clientes habilita substanciais economias de escala para bandas de transmissão crescentes. Modelos de programação matemática para tais problemas basicamente distinguem entre *rede de acesso* ou *rede local* e *rede de transporte*.

O problema de projeto de redes de acesso local consiste em ligar um servidor aos seus diversos pontos de demanda. Este problema pode ser visto como uma generalização do problema da árvore de Steiner, computando três tipos de custos: um custo linear variável dependente do fluxo em cada arco, um custo de instalação de cada arco e uma métrica capaz de avaliar o custo de congestionamento e de expansão de capacidade num dado arco (Luna e Mahey [82]). Para uma boa revisão, recomenda-se [83, 85, 124, 74, 81, 66, 67, 40]. Especificamente para o contexto de redes de computadores, a aplicação mais aderente é a construção de redes para *Multicasting*, como visto em [68].

Além dos exemplos de redes de computadores e sistemas de telecomunicação, pode-se tratar virtualmente qualquer rede local de distribuição de um dado produto ou serviço com tais modelos, com o uso de pequenos ajustes.

1.3 Localização de Facilidades e Projeto de Redes

Modelos de localização em redes têm sido usados extensivamente para analisar e determinar a localização de facilidades. Modelos clássicos incluem [120, 37, 76, 59]. Todos estes modelos localizam facilidades em uma rede já existente. A topologia de tal rede, entretanto, pode ter profundo impacto na localização ótima. Modelos que integram localização de facilidades e desenho de redes foram apresentados por Melkote e Daskin [94], [93], Berger e associados [18], Berman, Ingco e Odoni [19] e Campbell [34].

Nestes modelos mede-se tipicamente o custo de construção da rede cliente-servidor enquanto se decide a localização dos últimos. O modelo de atribuição subjacente todavia é linear, isto é, as facilidades em questão não são consideradas como interagentes, descartando-se a *interdependência* entre suas localizações.

Em problemas envolvendo a localização de servidores e o desenho da rede de interconexão dos mesmos (rede de transporte) bem como o projeto da rede local, existem considerações hierárquicas importantes: há diferenças tecnológicas entre o transporte na rede local (pequenas capacidades) e o transporte entre servidores (grandes capacidades). Tais diferenças favorecem o surgimento de economias de escala e não podem ser ignoradas.

Este trabalho apresenta um resumo da tese completa que segue em anexo, em inglês. Estuda-se diversas formulações que resolvem o problema integrado de localização de facilidades e projeto de redes, adicionando dois efeitos: custos de congestionamento e expansão de capacidades no nível cliente-servidor, e interdependência quando da localização dos diversos servidores, supostos interagentes. No capítulo 2, uma nova formulação para o nosso modelo locacional para facilidades interagentes, o *Quadratic Assignment Problem (QAP)*, é proposta e testada. Como resultado da solução eficiente de grandes instâncias do QAP, o capítulo 3 apresenta uma heurística de performance garantida para um problema de projeto de módulos multi-chip com custos térmicos. O capítulo 4 descorre acerca do projeto de redes locais com custos de congestionamento. O capítulo 5 trata da integração de desenho de rede e localização de facilidades. O capítulo 6, finalmente, sumariza as principais conclusões e contribuições alcançadas.

Capítulo 2

Problemas de Atribuição

2.1 Fundamentos Teóricos

Problemas de atribuição lidam com a melhor maneira de atribuir n ítens a n outros. Sua estrutura subjacente é a de um mapeamento bijetivo entre dois conjuntos finitos de n elementos. Pode-se representar uma atribuição de diversas formas. por exemplo através de uma *matriz de permutações* $X_\phi = (x_{ki})$ com $x_{ki} = 1$ se o elemento k está atribuído ao elemento i e $x_{ki} = 0$, caso contrário.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

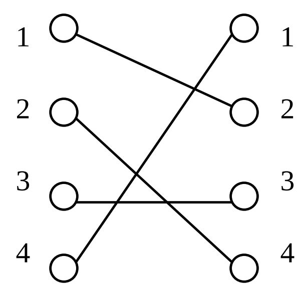

Figura 2.1: Different representations of assignments.

Denota-se o conjunto de todas as atribuições possíveis de n ítens por S_n, e o mesmo tem $n!$ elementos. Tal conjunto é descrito pelas *restrições de atribuição* dadas abaixo:

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki} = 1\,, \quad \forall \;\; i = 1, ..., n \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ki} = 1\,, \quad \forall \;\; k = 1, ..., n \tag{2.2}$$

$$x_{ki} \in \{0,1\}\,, \quad \forall \;\; k, i = 1, ..., n. \tag{2.3}$$

O interessante aqui é que a relaxação linear das restrições de integralidade (3) é integral [20].

2.2 O Problema de Atribuição Linear

Um primeiro modelo simples para a localização de facilidades indivisíveis seria o problema de atribuição linear ou *Linear Assignment Problem (LAP)*. Nesta formulação, a lucratividade advinda da localização da facilidade k no local i seria dada por uma matriz quadrada $A = a_{ki}$, a lucratividade do sistema estando sujeita a (1)-(3):

$$\max\, p = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_{ki} \tag{2.4}$$

sujeito a (2.1) - (2.3)

Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial, através do bem conhecido Algoritmo Húngaro[77, 24]. Todavia, ele não permite incluir efeitos de interação entre as facilidades.

2.3 O Problema Quadrático de Atribuição

Para adicionar a interação entre facilidades, pode-se por exemplo medir o custo associado ao transporte de bens intermediários, produzindo o problema quadrático de atribuição ou *Quadratic Assignment Problem(QAP)*. Definindo-se uma matriz de demandas dos bens intermediários $B = (b_{kl})$ e uma matriz de custo de transporte de tais produtos $C = (c_{ij})$, escrevemos o custo associado ao transporte de bens intermediários:

$$q = \sum_{(k,l)} \sum_{(i,j)} b_{kl} x_{ki} c_{ij} x_{lj} \tag{2.5}$$

e também o *Quadratic Assignment Problem*:

$$\max\; \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_{ki} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ij} x_{ki} b_{kl} x_{lj} \tag{2.6}$$

sujeito a (2.1) - (2.3)

O QAP é um dos mais difíceis problemas de otimização combinatória, pois mesmo a obtenção de soluções aproximadas por um fator constante do ótimo é $\mathcal{NP} - dificil$ [117, 29, 104].

2.3.1 Formulações Alternativas, Linearizações e Limites para o QAP

Existem diversas linearizações na literatura que, apesar de equivalentes, privilegiam características distintas do QAP. Para uma revisão completa sugerimos os trabalhos de

Lawler [78] e seu limite *Gilmore-Lawler Bound (GLB)*, Kaufman e Broeckx [72], Frieze e Yadegar [45], Adams e Johnson [1], Hahn e Grant [58], Ramakrishnan et al. [112], Burkard [24], Karisch [29], Balas [11], Burkard e Cela [25, 27], Heffley [60], Bazaraa [13], e também [28, 6].

A linearização de Adams e Johnson é conhecida por dominar as demais. Ela conta com n^2 variáveis binárias, $n^4 - 2n^3 + n^2$ variáveis contínuas, e $n^4 - n^2 + 2n$ restrições:

$$\max \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_{ki} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{kilj}y_{kilj} \tag{2.7}$$

sujeito a (2.1) - (2.3) e:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} y_{kilj} &= x_{ki} \ , \ \forall i,k,l = 1,...,n, \ i \neq j, \ k \neq l && (2.8)\\
\sum_{l=1}^{n} y_{kilj} &= x_{ki} \ , \ \forall i,j,k = 1,...,n, \ i \neq j, \ k \neq l && (2.9)\\
y_{kilj} &= y_{ljki} \ , \ \forall i,j,k,l = 1,...,n, \ i \neq j, \ k \neq l, && (2.10)\\
y_{kilj} &\geq 0 \ , \ \forall i,j,k,l = 1,...,n, \ i \neq j, \ k \neq l && (2.11)
\end{aligned}$$

Existem trabalhos sobre o QAP que enfocam teoria poliedral como Barvinok [12], Junger e Kaibel [69, 70] e Padberg e Rijal [103]. Tais estudos dão origem a famílias de linearizações extremamente fortes mas também muito difíceis. Outros autores preferem trabalhar com o QAP em sua forma original, o que dá origem à *formulação do traço*:

$$\max tr(A - CXB^T)X^T \tag{2.12}$$

sujeito a:

$$X \in \mathcal{X}_n. \tag{2.13}$$

Esta formulação foi usada por Finke, Burkard e Rendl [43] para introduzir limites baseados em autovalores, mais fortes que os limites de programação linear inteira.

Mais recentemente deve-se destacar o trabalho de Anstreicher et al. [5] baseado em relaxações por programação semidefinida. Este grupo tem obtido soluções de instâncias muito grandes e complexas com o uso de computação paralela massiva [6].

2.3.2 Formulações de Fluxos Para o QAP

Uma primeira formulação de fluxos para o problema foi proposta por Koopmans e Beckmann em seu trabalho original [75]:

$$\max \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_{ki} \; - \; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ij}f_{ij}^{kl} \tag{2.14}$$

sujeito a (2.1) - (2.3) e:

$$b_{kl}x_{ki} + \sum_{j=1}^{n} f_{ji}^{kl} \;=\; b_{kl}x_{li} + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{kl} \;,\; \forall \;\; i,k,l = 1,...,n \tag{2.15}$$

$$f_{ii}^{kl} \;=\; 0 \;,\; \forall \;\; i,k,l = 1,...,n \tag{2.16}$$

$$f_{ij}^{kl} \;\geq\; 0 \;,\; \forall \;\; i,j,k,l = 1,...,n \tag{2.17}$$

Esta formulação entretanto é muito fraca pois permite que se satisfaça as restrições (2.15) com fluxos nulos. Sugere-se então reescrever tais restrições na forma de dois conjuntos equivalentes, representando balanços de fluxo em cada origem e destino:

$$\max \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_{ki} - \sum_{(i,j),i\neq j}\;\sum_{(k,l),k\neq l} c_{ij}f_{ij}^{kl} \tag{2.18}$$

sujeito a (2.1) - (2.3) e:

$$-\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{kl} \;=\; -b_{kl}x_{ki} \;,\; \forall \;\; i,k,l = 1,...,n, i \neq j \;, k \neq l \tag{2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^{kl} \;=\; b_{kl}x_{lj} \;,\; \forall \;\; j,k,l = 1,...,n, i \neq j \;, k \neq l \tag{2.20}$$

$$f_{ij}^{kl} \;\geq\; 0 \;,\; \forall \;\; i,j,k,l = 1,...,n, i \neq j \;, k \neq l \tag{2.21}$$

A formulação acima implica fluxos não nulos, produzindo limites melhores que a anterior. É também mais fácil de ajustar ao esquema de decomposição proposto na seção seguinte. Ela conta com n^2 variáveis binárias, $n^4-2n^3+n^2$ variáveis contínuas, e n^4-n^2+2n restrições. Para torná-la ainda mais interessante, adiciona-se uma nova família de restrições, responsáveis por estabelecer equilíbrio de fluxos entre a facilidade k localizada em i e a facilidade l localizada em j:

$$\frac{1}{b_{kl}}\; f_{ij}^{kl} \;=\; 1 \;,\; \forall \;\; i,j,k,l = 1,...,n, i \neq j \;, k \neq l$$

$$\frac{1}{b_{lk}}\; f_{ji}^{lk} \;=\; 1 \;,\; \forall \;\; i,j,k,l = 1,...,n, i \neq j \;, k \neq l$$

resultando:

$$\frac{1}{b_{kl}}\; f_{ij}^{kl} \;=\; \frac{1}{b_{lk}}\; f_{ji}^{lk} \;,\; \forall \;\; i,j,k,l = 1,...,n, i \neq j \;, k \neq l$$

e implicando:

$$b_{lk}\ f_{ij}^{kl} \ = \ b_{kl} f_{ji}^{lk} \ , \ \forall \ \ i,j,k,l = 1,...,n, i \neq j \ , k \neq l \tag{2.22}$$

Estas restrições aparentemente inócuas são a chave para obter uma formulação que dê bons limites e seja também muito rápida. Testa-se a seguir as formulações apresentadas.

2.3.3 Uma Primeira Experiência Computacional

Sumariza-se aqui os resultados da experiência conduzida com as formulações abordadas na seção anterior. Para uma descrição mais completa, veja a documentação completa em inglês em anexo. Foi produzida uma implementação através da interface de programação de aplicativos *ILOG CPLEX 7.0 Concert Technology* para cada formulação. As instâncias testadas foram obtidas da biblioteca digital *QAPLIB*. Também foram produzidas instâncias pseudo-randômicas com o gerador padrão do compilador C/C++ GNU. Custos lineares são setados pseudo-aleatoriamente e a razão entre custos lineares e quadráticos p/q é mantida sob controle. Os testes são descritos e apresentados nas tabelas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 e nas figuras (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) e (2.7).

O que fica demonstrado neste experimento preliminar é o fato de que nem sempre a formulação mais forte é a mais indicada para resolver um dado problema. O custo da obtenção de bons limites inferiores também é variável importante do processo de solução. Para uma análise mais profunda e completa da experiência, consulte a documentação em inglês em anexo.

2.4 Um esquema de Decomposição de Benders

A seguir é produzido um esquema de decomposição de Benders [17]. Esta técnica ganhou relevância depois do aplicação bem sucedida conduzida por Geoffrion e Graves [52] e do trabalho de Magnanti e Wong [87]. Destacam-se também os trabalhos de Geoffrion [51] e de Balas e Bergthaller [10] na generalização do método para programas não-lineares inteiros e na revisão da geração de cortes, respectivamente. O método de Benders consiste nas estratégias de projeção, dualização, relaxação e linearização externa.

Começando pela formulação dada por (2.18) - (2.21), escreve-se o problema a ser tratado no nível superior:

$$\min \ - \ \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_{ki} \ + \ t(x) \tag{2.23}$$

sujeito a (2.1)-(2.3)

QAPLIB	Flow Formulation		Bound	Adams and Johnson		Bound	Integer
instance	lp bound	time[s]	Quality	lp bound	time[s]	Quality	Optimal
chr12a	8593.12	1	0.900	9552	725	1.000	9552
chr12b	7184	1	0.737	9742	508	1.000	9742
chr12c	10042.7	1	0.900	11156	1068	1.000	11156
chr15a	8621.94	4	0.871	9513	30146	0.961	9896
chr15c	9504	4	1.000	9504	3622	1.000	9504
had12	894	17	0.541	1621.54	2533	0.982	1652
had14	1300.5	62	0.477	2666.12	14778	0.979	2724
lipa10a	318.8	4	0.674	473	50	1.000	473
nug12	348	10	0.602	522.89	6597	0.905	578
nug15	621	86	0.540	1041	131923	0.905	1150
nug5	49	1	0.980	50	0	1.000	50
nug6	72	0	0.837	86	1	1.000	86
nug7	118	0	0.797	148	3	1.000	148
nug8	154	1	0.720	203.5	17	0.951	214
scr10	21958	2	0.816	26873.1	269	0.998	26922
scr12	25474	5	0.811	29827.3	4555	0.950	31410
tai10a	47953.3	3	0.355	131098	160	0.971	135028
tai10b	855788	1	0.723	1176140	248	0.994	1183760
tai5a	10747	0	0.833	12902	0	1.000	12902
tai6a	21427.8	1	0.728	29432	1	1.000	29432
tai7a	31730.1	0	0.588	53976	1	1.000	53976
tai8a	41952.2	1	0.541	77502	7	1.000	77502
tai9a	41816	2	0.442	93501	37	0.988	94622

Tabela 2.1: Linear programming bounds for both formulations under comparison and respective computing times.

onde $t(x)$ é dado por:

$$t(x) = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ij} f_{ij}^{kl} \tag{2.24}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{kl} &= -b_{kl} x_{ki} \ , \ \forall \ \ i,k,l = 1,...,n, i \neq j \ , k \neq l && (2.25) \\ \sum_{i=1}^{n} f_{ij}^{kl} &= b_{kl} x_{lj} \ , \ \forall \ \ j,k,l = 1,...,n, i \neq j \ , k \neq l && (2.26) \\ f_{ij}^{kl} &\geq 0 \ , \ \forall \ \ i,j,k,l = 1,...,n, i \neq j \ , k \neq l && (2.27) \end{aligned}$$

for x fixed.

Associando dois vetores de variáveis duais v_j^{kl} e u_i^{kl} o subproblema dual pode ser escrito como:

Original instance	Problem size	Variables		p/q ratio	Flow form. time[s]	Adams and Johnson time[s]
		Integer	Continuous			
esc8a	8	64	3136	0	6	146
esc8b				0	15	710
esc8c				0	14	207
esc8d				0	6	196
esc8e				0	14	176
esc8f				0	5	202
nug6	6	36	900	0	2	1
nug7	7	49	1764	0	4	6
nug8	8	64	3136	0	15	227
rpqa7	7	49	1764	0	9	2
rpqa8	8	64	3136	0	55	83
rpqa9	9	81	5184	0	348	166
tai7a	7	49	1764	0	6	1
tai8a	8	64	3136	0	28	9
tai9a	9	81	5184	0	247	178
tai10a	10	100	8100	0	1197	1218

Tabela 2.2: Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and a comparison of integer mixed programming computing times.

$$t(x) = \max \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kl}x_{lj}v_j^{kl} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{kl}x_{ki}u_i^{kl} \tag{2.28}$$

sujeito a:

$$v_j^{kl} - u_i^{kl} \leq c_{ij} \ , \ \forall \ i,j,k,l = 1,...,n, \ i \neq j, \ k \neq l \tag{2.29}$$

$$v_j^{kl} \in \mathcal{R} \ , \ \forall \ j,k,l = 1,...,n, \ i \neq j, \ k \neq l \tag{2.30}$$

$$u_i^{kl} \in \mathcal{R} \ , \ \forall \ i,k,l = 1,...,n, \ i \neq j, \ k \neq l \tag{2.31}$$

for x fixed.

O problema (2.23) é então equivalente ao problema mestre de Benders:

$$\min \ - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_{ki} \ + \ \eta \tag{2.32}$$

sujeito a (2.1) - (2.3) e:

$$\eta \geq \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kl}x_{lj}v_j^{kl,h} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{kl}x_{ki}u_i^{kl,h} \ , \forall h \tag{2.33}$$

2.4.1 Subproblemas

O subproblema dual tem muitas soluções viáveis, ao contrário do subproblema primal, que tem apenas uma solução (trivial) viável. Da complementaridade de folgas:

Original instance	Problem size	Variables Integer	Continuous	p/q ratio	Flow form. time[s]	Adams and Johnson time[s]
chr12a				0.426	4	584
chr12a				0.796	3	629
chr12b	12	144	17424	0.383	5	516
chr12b				0.592	3	492
chr12c				0.314	3	803
chr12c				0.662	4	1217
chr15a				0.631	16	14209
chr15a				0.856	6	10125
chr15b	15	225	44100	0.726	36	77071
chr15b				1.817	14	60452
chr15c				0.944	19	3872
chr15c				0.807	9	3058
chr18a				0.564	116	*
chr18a	18	324	93636	1.304	41	*
chr18b				0.455	21	*
chr18b				1.864	7	*
chr20a				1.047	76	*
chr20a				2.028	28	*
chr20b	20	400	144400	0.824	47	*
chr20b				1.702	10	*
chr20c				1.056	108	*
chr22a				0.304	138	*
chr22a	22	484	213444	0.744	19	*
chr22b				0.293	96	*
chr22b				1.341	18	*

Tabela 2.3: Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and a comparison of mixed integer programming computing times.

$$\begin{aligned} v_j^{kl,h} - u_i^{kl,h} &\leq c_{ij} \ , \ \forall \ \ i,j = 1,...,n, \ i \neq j, \ k \neq l \\ v_j^{kl,h} - u_i^{kl,h} &= c_{ij} \ , \ \text{if} \ \ x_{ki}^h = 1 \ \ \text{e} \ \ x_{lj}^h = 1 \end{aligned}$$

Fixando uma única variável $u_i^{kl,h}$, tem-se:

$$v_j^{kl,h} = u_i^{kl,h} + c_{ij} \ , \ \forall \ \ j = 1,...,n, \ i \neq j, \ k \neq l \tag{2.34}$$

usando $v_j^{kl,h}$ dado acima, define-se as demais variáveis $u_i^{kl,h}$:

$$u_i^{kl,h} = \max_{j \ , \ j \neq i} \ [v_j^{kl,h} - c_{ij}] \ , \ \forall \ \ i = 1,...,n \ , \ i \neq j \ , \ k \neq l \tag{2.35}$$

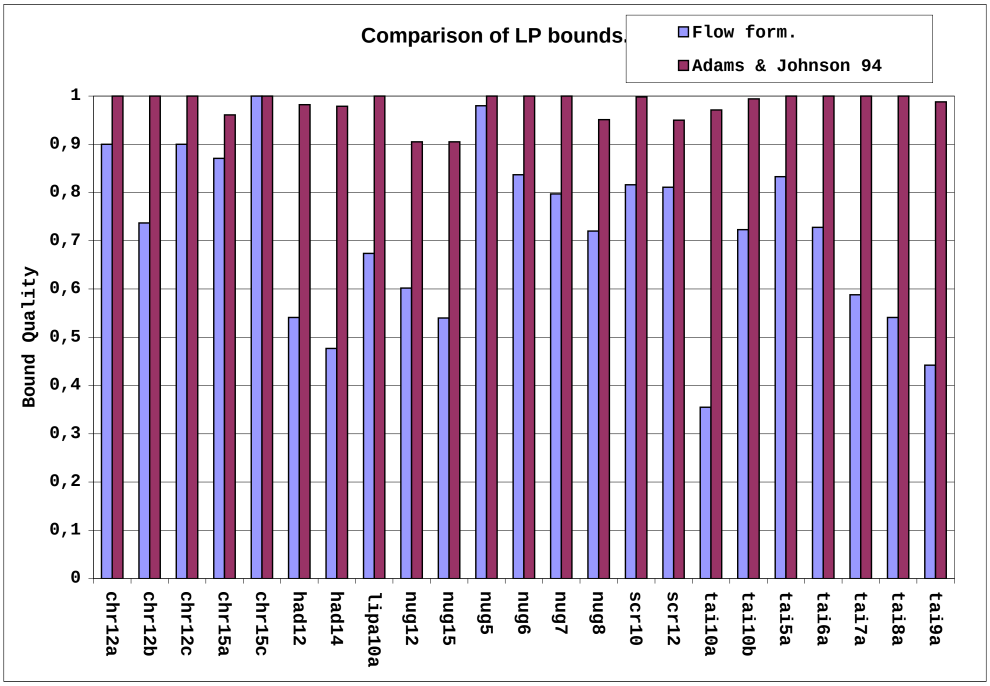

Figura 2.2: Comparison of linear programming bounds for both formulations.

2.4.2 Aprimorando a Decomposição de Benders com Restrições de Equilíbrio de Fluxos

Para acomodar ao esquema de decomposição desenvolvido as restrições (2.22), observa-se que as mesmas descrevem um acoplamento entre os fluxos dos produtos kl e lk. Reescreve-se então o subproblema primal:

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}f_{ij}^{kl} + c_{ji}f_{ji}^{lk})$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{kl} &= -b_{kl}x_{ki} \ , \ \forall \ \ i = 1, ..., n, i \neq j \\
-\sum_{i=1}^{n} f_{ji}^{lk} &= -b_{lk}x_{lj} \ , \ \forall \ \ j = 1, ..., n, i \neq j \\
\sum_{i=1}^{n} f_{ij}^{kl} &= b_{kl}x_{lj} \ , \ \forall \ \ j = 1, ..., n, i \neq j
\end{aligned}$$

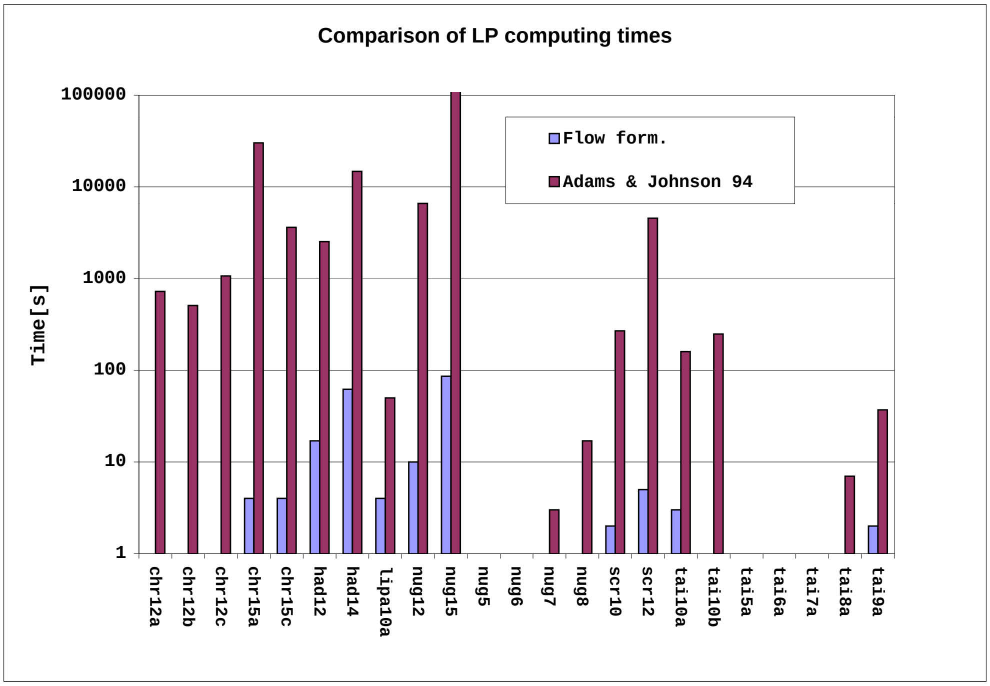

Figura 2.3: Comparison of lp computing times for both formulations.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} f_{ji}^{lk} &= b_{lk} x_{ki} \ , \ \forall \ \ i = 1, ..., n, i \neq j \\
b_{lk} f_{ij}^{kl} &= b_{kl} f_{ji}^{lk} \ , \ \forall \ \ i, j = 1, ..., n, i \neq j \\
f_{ij}^{kl} &\geq 0 \ , \ \forall \ \ i, j = 1, ..., n, i \neq j \\
f_{ji}^{lk} &\geq 0 \ , \ \forall \ \ i, j = 1, ..., n, i \neq j
\end{aligned}
$$

A solução única e trivial de tal problema é $f_{ij}^{kl} = b_{kl}$ e $f_{ji}^{lk} = b_{lk}$, para $x_{ki} = 1$ e $x_{lj} = 1$, e $f_{ij}^{kl} = 0$ e $f_{ji}^{lk} = 0$, caso contrário. Este resultado leva ao subproblema dual para os produtos kl e lk, para $x = x^h$, $k \neq l$:

$$
\max \ b_{kl}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{lj} v_j^{kl} - \sum_{i=1}^{n} x_{ki} u_i^{kl}\right) + b_{lk}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ki} v_i^{lk} - \sum_{j=1}^{n} x_{lj} u_j^{lk}\right)
$$

sujeito a:

$$
\begin{aligned}
v_j^{kl} + b_{lk} \lambda_{ij}^{kl} - u_i^{kl} &\leq c_{ij} \ , \ \forall \ \ i, j = 1, ..., n \ , i \neq j \\
v_i^{lk} - b_{kl} \lambda_{ij}^{kl} - u_j^{lk} &\leq c_{ji} \ , \ \forall \ \ i, j = 1, ..., n \ , i \neq j
\end{aligned}
$$

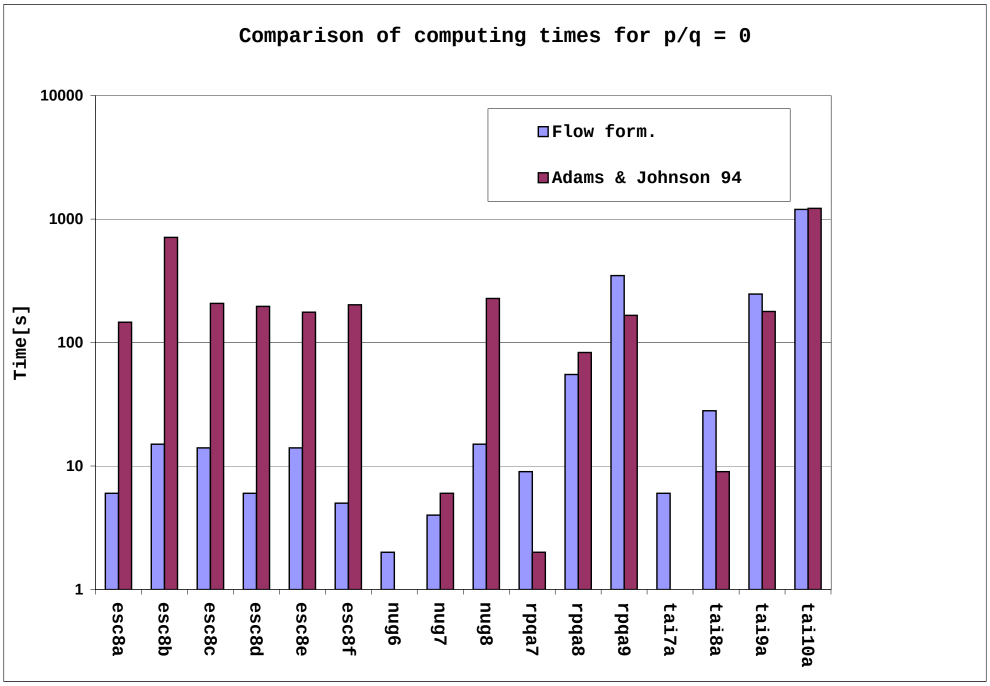

Figura 2.4: Comparison of mip computing times for both formulations.

$$
\begin{aligned}
v_j^{kl} &\in \mathcal{R} \ , \ \forall \ \ j = 1, ..., n, \ i \neq j \\
u_i^{kl} &\in \mathcal{R} \ , \ \forall \ \ i = 1, ..., n, \ i \neq j
\end{aligned}
$$

Fixando u_i^{kl} e u_j^{lk}, e fazendo $\lambda_{ij}^{kl} = 0$ para i e j tais que $x_{ki}^h = 1$ e $x_{lj}^h = 1$, resulta:

$$
\begin{aligned}
v_j^{kl,h} = u_i^{kl,h} + c_{ij} \ , \ \forall \ \ j = 1, ..., n \\
v_i^{lk,h} = u_j^{lk,h} + c_{ji} \ , \ \forall \ \ i = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

Usando $v_j^{kl,h}$ e $v_i^{lk,h}$ já definidos, u_i^{kl} e u_j^{lk} são dados por:

$$
\begin{aligned}
u_i^{kl,h} - b_{lk}\lambda_{ij}^{kl,h} &\geq v_j^{kl,h} - c_{ij} \ , \ \forall \ \ i, j = 1, ..., n, \ i \neq j \\
u_j^{lk,h} + b_{kl}\lambda_{ij}^{kl,h} &\geq v_i^{lk,h} - c_{ji} \ , \ \forall \ \ i, j = 1, ..., n, \ i \neq j
\end{aligned}
$$

Um valor grande de λ_{ij}^{kl} pode aumentar $u_i^{kl,h}$ e decrescer $u_j^{lk,h}$. A idéia aqui é decrescer o valor de qualquer component de u o máximo possível, nunca aumentando outra:

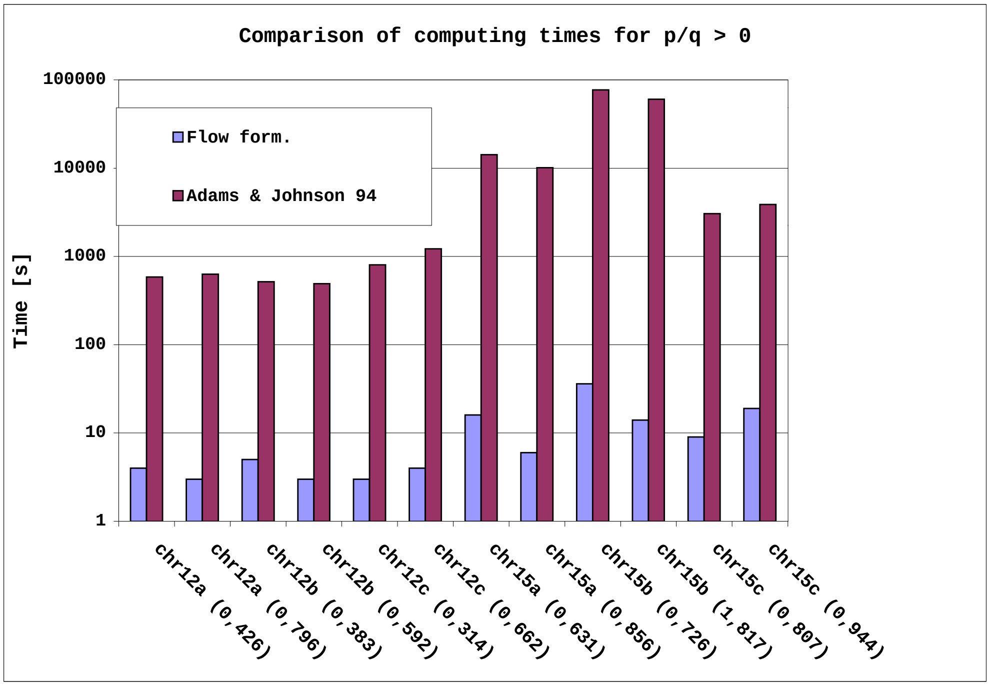

Figura 2.5: Comparison of mip computing times for both formulations.

$$u_i^{kl,h} = \max_{j\ ,\ j\neq i}\ [v_j^{kl,h} - c_{ij}]\ ,\ \forall\ \ i = 1,...,n\ ,\ i \neq j$$

logo $\lambda_{ij}^{kl,h}$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\lambda_{ij}^{kl,h} &= 0 \quad \text{for index } j \text{ that maximizes } \quad v_j^{kl,h} - c_{ij} \\
\lambda_{ij}^{kl,h} &= \frac{1}{b_{lk}}(u_i^{kl,h} - v_j^{kl,h} + c_{ij})\ ,\ \forall\ \ i,j = 1,...,n,\ i \neq j
\end{aligned}$$

Pode-se então reduzir os preços u na origem j para o produto lk:

$$u_j^{lk,h} = \max_{i\ ,\ i\neq j}\ [v_i^{lk,h} - b_{kl}\lambda_{ij}^{kl,h} - c_{ji}]\ ,\ \forall\ \ i = 1,...,n,\ i \neq j$$

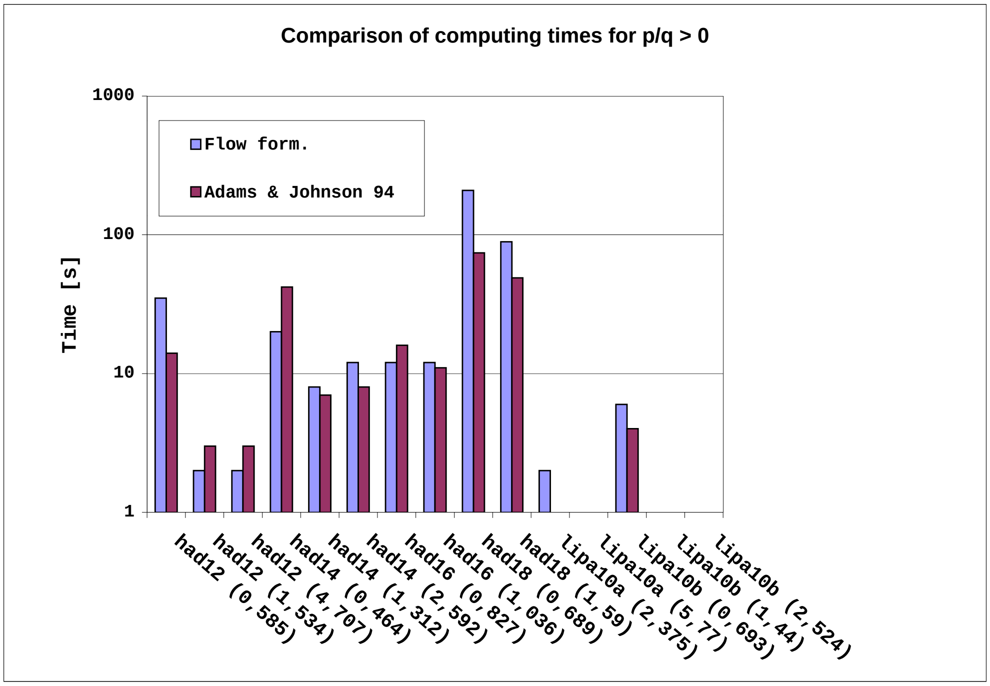

Figura 2.6: Comparison of mip computing times for both formulations.

2.5 Experiência Computacional com a Decomposição de Benders Aprimorada

Estas experiências seguem os mesmos padrões adotados para as experiências anteriores. Para uma descrição mais completa, veja documento em anexo. O experimento é apresentado nas tabelas 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 e nas figuras 2.9, 2.10, 2.11.

Na tabela 2.10 tem-se instâncias nunca resolvidas na literatura:

É possível ver que os resultados apresentados são expressivos, e que o algoritmo de decomposição de Benders atua melhor para razões p/q maiores que 2. Para uma análise mais completa desta experiência, ver documento em anexo.

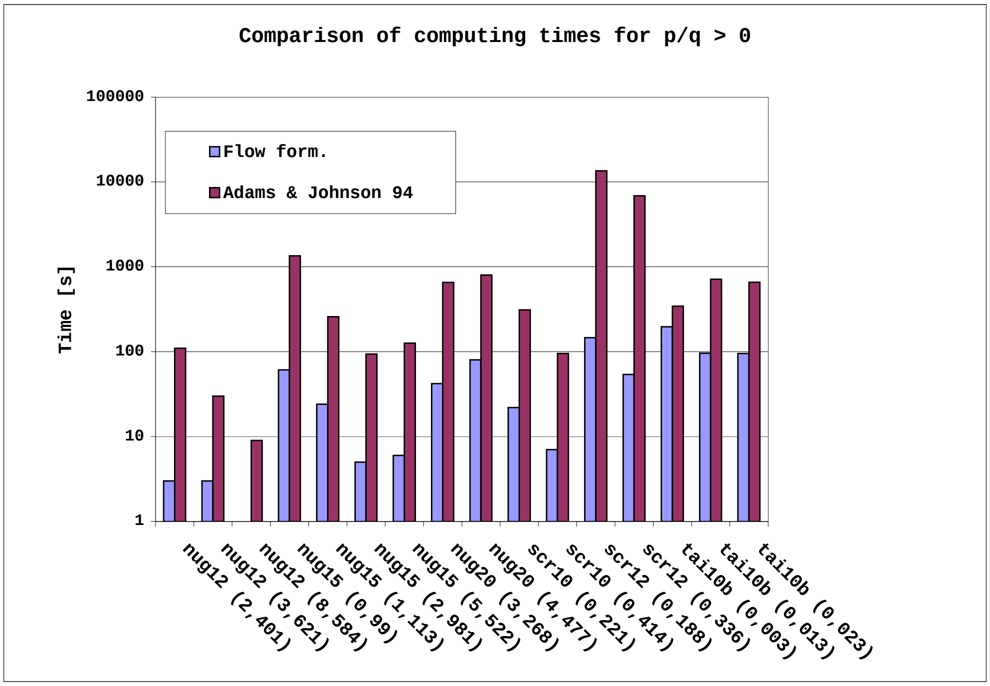

Figura 2.7: Comparison of mip computing times for both formulations.

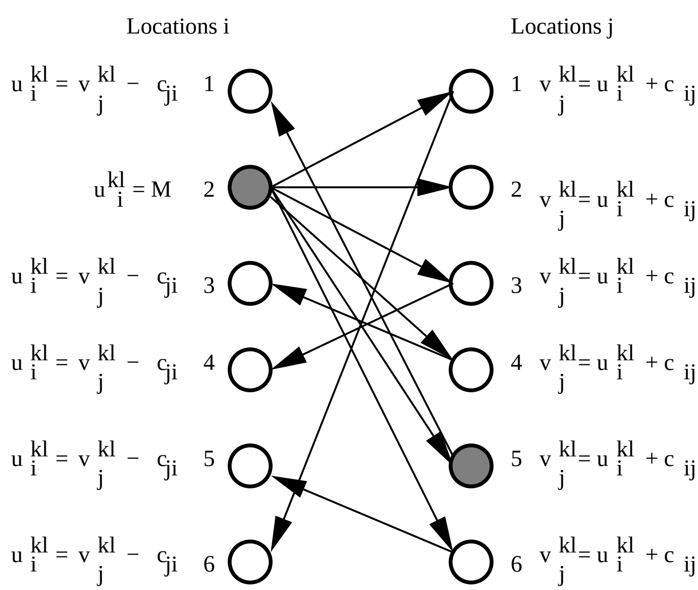

Figura 2.8: An example of automatic construction of a feasible solution for the dual subproblem.

Original instance	Problem size	Variables		p/q ratio	Flow form. time[s]	Adams and Johnson time[s]
		Integer	Continuous			
had12				0.585	35	14
had12	12	144	17424	1.534	2	3
had12				4.707	2	3
had14				0.464	20	42
had14	14	196	33124	1.312	8	7
had14				2.592	12	8
had16	16	256	57600	0.827	12	16
had16				1.036	12	11
had18	18	324	93636	0.689	209	74
had18				1.590	89	49
lipa10a				2.375	2	1
lipa10a				5.770	1	1
lipa10b	10	100	8100	0.693	6	4
lipa10b				1.440	1	1
lipa10b				2.524	1	1
nug12				2.401	3	110
nug12	12	144	17424	3.621	3	30
nug12				8.584	1	9
nug15				0.990	61	1350
nug15	15	225	44100	1.113	24	258
nug15				2.981	5	94
nug15				5.522	6	126
nug20				0.434	1069	*
nug20	20	400	144400	3.268	42	654
nug20				4.477	80	799
nug30	30	900	756900	0.769	2719	*
nug30				1.358	1779	*
scr10	10	100	8100	0.221	22	311
scr10				0.414	7	95
scr12	12	144	17424	0.188	146	13554
scr12				0.336	54	6854
ste36a				0.843	2896	*
ste36a	36	1296	1587600	1.199	2801	*
ste36a				1.871	2196	*
tai10b				0.003	197	344
tai10b	10	100	8100	0.013	96	714
tai10b				0.023	95	658

Tabela 2.4: Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and a comparison of mixed integer programming computing times.

Original instance	Problem size	Iterations h	Variables		p/q ratio	Benders algorithm time[s]
			Integer	Continuous		
esc8a	8	82	64	3136	0	473
nug5	5	33	25	400	0	11
nug6	6	188	36	900	0	1266
nug12	12	102	144	17424	1.810	663
		23			3.621	11
		31			3.621	26
nug15	15	11	225	44100	4.881	2
		15			6.303	5
		63			1.258	661
nug20	20	13	400	144400	3.992	11
		9			4.477	2
rou12	12	99	144	17424	2.630	199
ste36a	36	108	1296	1587600	3.853	1381
		40			5.780	108
tai5a	5	45	25	400	0	14
tai6a	6	188	36	900	0	1071
tai7a	7	657	49	1764	0	90437

Tabela 2.5: Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and computing times for Benders decomposition.

Instance name	Problem size	Iterations h	Variables Integer	Variables Continuous	p/q ratio	Benders algorithm time[s]
rpqa16	16	40	256	57600	2.395	67
		37			2.412	56
		102			2.490	842
		47			2.667	94
		53			2.680	136
		33			2.701	53
		19			2.752	12
		20			4.158	12
		15			4.400	6
		20			4.508	12
		17			4.583	8
rpqa25	25	74	625	360000	3.261	821
		40			4.483	124
		42			4.496	146
		36			4.598	101
		31			4.731	72
		30			4.771	63
		21			5.194	30
		21			5.381	29
		11			5.767	6
		26			5.801	40
		15			5.816	11
		20			6.071	22
		15			6.377	11
rpqa9	9	21	81	5184	3.037	5
		6			7.594	0
		5			11.071	0
		3			15.189	0

Tabela 2.6: Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and computing times for Benders decomposition.

Original instance	Problem size	Iterations h	Variables Integer	Continuous	p/q ratio	Benders algorithm time[s]	Flow form. time[s]
chr12a		55			1.571	196	3
chr12b	12	31	144	17424	2.555	59	4
chr12c		81			2.374	736	4
chr15a		142			1.383	3349	8
chr15c	15	76	225	44100	2.191	1283	3
chr15b		28			3.268	27	4
nug15	15	9	225	44100	1.894	2	7
nug20	20	30	400	144400	3.267	35	61
nug30	30	44	900	756900	1.889	188	1236
chr18a	18	68	324	93636	2.407	201	16
chr18b		3			21.40	0	11
chr20a		9			10.82	2	19
chr20a		5			8.948	0	18
chr20a		4			3.871	1	18
chr20a		38			4.266	56	26
chr20a	20	50	400	144400	4.728	99	20
chr20b		4			10.75	0	20
chr20b		4			6.854	1	20
chr20b		15			4.069	6	20
chr20b		45			2.268	65	22
chr22a	22	69	484	213444	2.265	425	34
had12	12	13	144	17424	2.531	4	3
had14	14	25	196	33124	2.591	19	13
had16	16	9	256	57600	1.035	2	12

Tabela 2.7: Problem dimensions for test instances, number of integer and continuous variables, p/q ratio and computing times for Benders decomposition and flow formulation.

p/q ratio	0		1		2		4	
Instance	flow	Benders	flow	Benders	flow	Benders	flow	Benders
nug12	*	*	5	101	2	2	1	1
nug15	*	*	7	129	7	23	5	0
nug20	*	*	139	30751	55	13	52	8
had14	*	*	16	4	5	1	5	1
had16	*	*	12	27781	22	130	11	3
had18	*	*	31	3595	39	18	24	1
chr15a	*	*	6	511	7	32	5	4
chr15b	*	*	35	748	6	45	3	22
chr15c	*	*	19	469	5	37	2	89
chr18a	*	*	40	*	7	16	6	4
ste36a	*	*	2821	*	2196	*	1971	952

Tabela 2.8: Evolution of computing times for Benders algorithm and the flow formulation

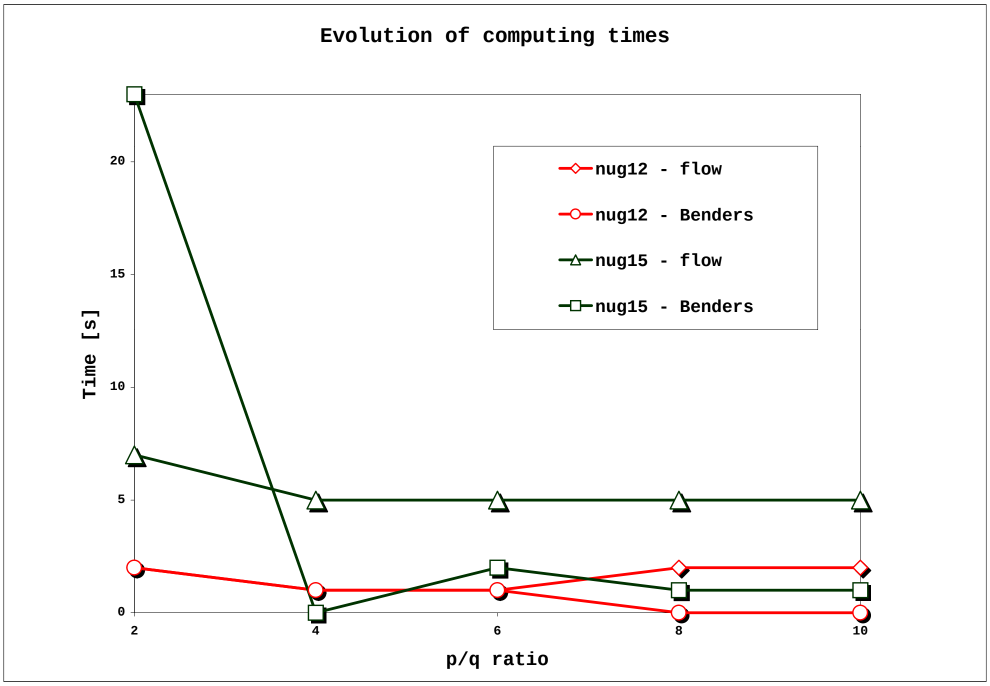

Figura 2.9: Evolution of computing times with p/q ratio.

p/q ratio	6		8		10	
Instance	flow	Benders	flow	Benders	flow	Benders
nug12	1	1	2	0	2	0
nug15	5	2	5	1	5	1
nug20	39	1	41	1	40	1
had14	5	1	5	2	7	2
had16	10	0	11	0	10	0
had18	23	1	22	1	24	0
chr15a	2	2	4	1	3	0
chr15b	3	3	3	1	2	0
chr15c	3	1	2	1	3	1
chr18a	6	1	5	1	6	2
ste36a	1964	1	1925	3	1947	3

Tabela 2.9: Evolution of computing times for Benders algorithm and the flow formulation

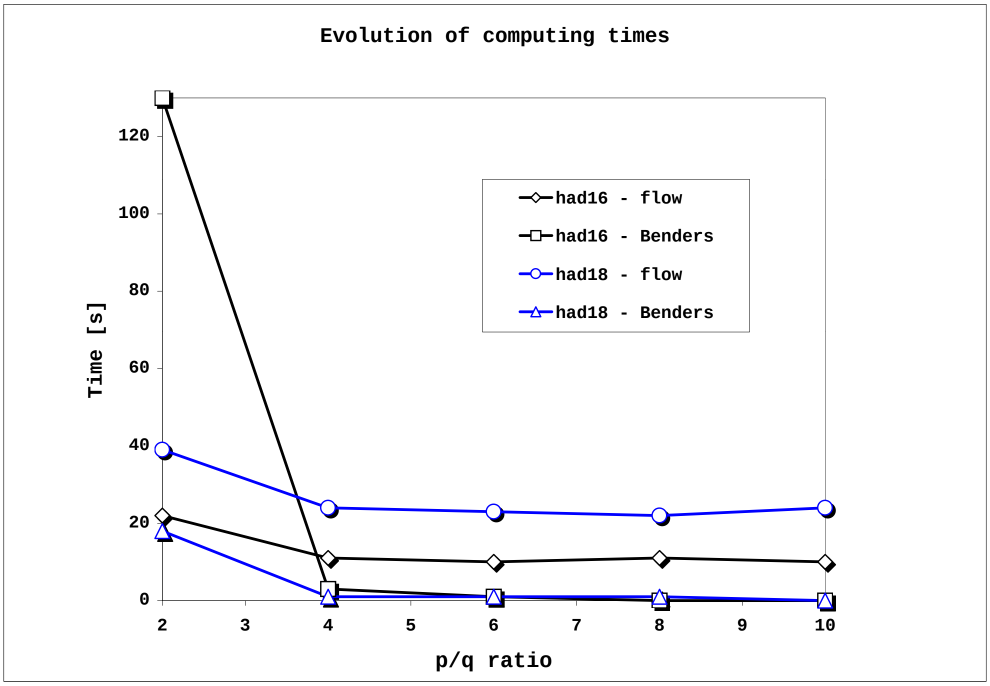

Figura 2.10: Evolution of computing times with p/q ratio.

Original instance	Problem size	Iterations h	Variables Integer	Variables Continuous	p/q ratio	Benders algorithm time[s]
tho40	40	278	1600	2433600	2.161	43734
sko49	49	268	2401	5531904	8.386	57170
		100			10.240	4224
sko64	64	295	4096	16257024	8.303	134236
		118			9.707	6859

Tabela 2.10: Solution of larger instances using the Benders algorithm.

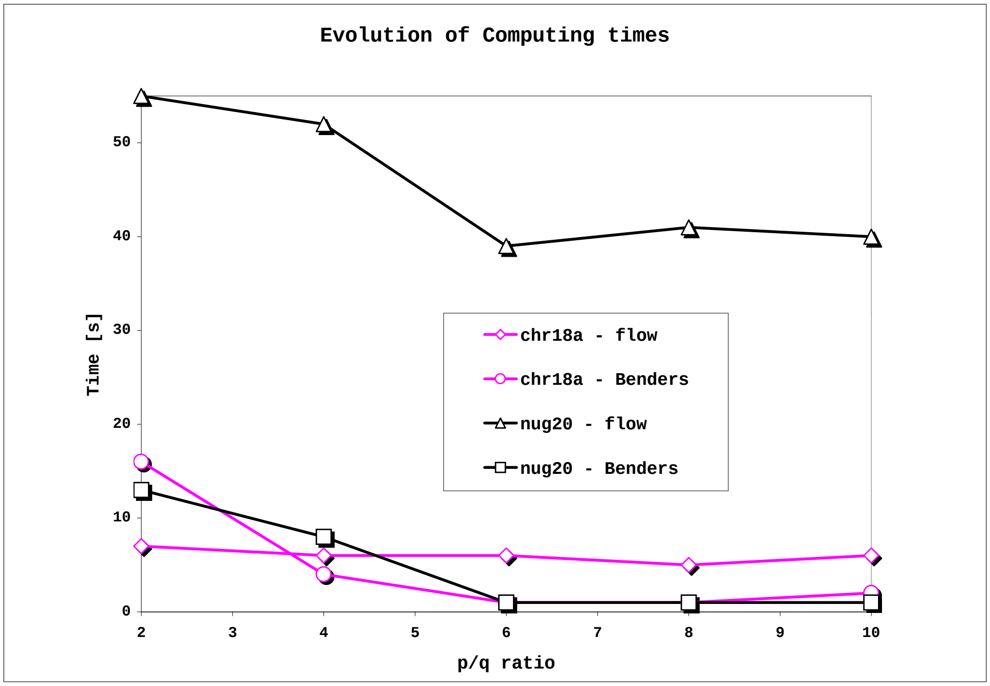

Figura 2.11: Evolution of computing times with p/q ratio.

Capítulo 3

Localização de Componentes Eletrônicos e Efeitos Térmicos

3.1 Introdução

Todos os sistemas eletrônicos e micro-eletrônicos estão migrando de locais com controle de ambiente para os ambientes de aplicação direta. O número de dispositivos de uso cotidiano que usam eletrônica embarcada cresce a cada dia e esta tendência tende a se firmar nos anos seguintes. Este contexto impacta fortemente a durabilidade e a confiabilidade do produto. Surge então o desafio de proteger tais sistemas contra altas temperaturas, resíduos atmosféricos e vibrações mecânicas.

Especificamente, as condições de transferência de calor introduzem fortes restrições ao projeto de máquinas computacionais de grande poder. Esta é a principal razão pela qual surgiu grande interesse na comunidade científica pelo tratamento de problemas térmicos no domínio micro-eletrônico. Uma boa revisão desta matéria deve incluir os trabalhos de Lorente, Wechsatol e Bejan [79], Zuo, Hoover e Phillips [127], Visser e Kock [122], Rocha, Lorente e Bejan [114], Wechsatol et al. [123]. Huang et al. [65, 64, 63] aborda especificamente o impacto térmico no projeto de módulos multi-chip (*Multi Chip Modules Design*). Destacam-se ainda Queipo [110], [109], Burmann et al. [30], Boyalakuntla e Murthy [22], Tucker [121], Rosales et al. [115], EYK, Wen e Choo [97], Craig et al. [39] e Queipo et al. [108].

Para abordar este problema deve-se dispor de um algoritmo de otimização capaz de tratar o problema de localização de maneira eficaz. Ele também deve ser poderoso o bastante para lidar com uma segunda métrica de qualidade da solução: a máxima temperatura sobre a placa em projeto. Até hoje, estes problemas só são abordados de forma combinada através de metaheurísticas. Desenvolve-se aqui um algoritmo baseado em decomposição de

Benders capaz de resolver exatamente o problema de localização de componentes eletrônicos enquanto lida com a temperatura máxima de modo heurístico. Como conseqüência temos uma heurística com garantia de performance para o problema combinado, inteiramente original.

Na localização de componentes eletrônicos deve-se atribuir n componentes a n posições pré-definidas em uma placa de circuito impresso, construindo o eletrônico em questão. Conforme proposto por Steinberg [29], é necessário minimizar as distâncias entre componentes com altos níveis de interatividade, evitando atrasos de propagação e sinais. Trata-se então de um problema de localização bem modelado através do *Quadratic Assignment Problem (QAP)*. Minimizar apenas estes custos pode levar o projetista a aproximar as maiores fontes de calor, gerando temperaturas máximas indesejáveis (e custosas).

3.2 Modelagem Térmica e Custos de Penalização sobre Temperaturas

Para simular o comportamento do campo térmico para uma dada atribuição, deve-se resolver a equação governante dos fenômenos de transporte de energia, a *Equação de Condução de Calor*, escrita a seguir para duas dimensões:

$$\kappa_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \kappa_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + g(z, y, \tau) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{3.1}$$

aqui T é a temperatura $[^oC]$, z e y são coordenadas espaciais $[m]$, $g(z, y, \tau)$ é a distribuição volumétrica discreta de fontes de calor $[W/m^3]$, τ é o tempo $[s]$, κ é a condutividade térmica $[W/(^oC \cdot m)]$, ρ é a massa específica $[kg/m^3]$ do sistema e c_p é o calor específico à pressão constante$[kJ/(^oC \cdot kg)]$. Esta é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, sujeita às seguintes condições de contorno em cada lateral da placa em projeto:

$$\begin{aligned}
-\kappa_z A_z \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=z_1} &= h_1^{conv} A_z (T - T_\infty) \\
-\kappa_z A_z \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=z_2} &= h_2^{conv} A_z (T - T_\infty) \\
-\kappa_y A_y \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=y_1} &= h_3^{conv} A_y (T - T_\infty) \\
-\kappa_y A_y \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=y_2} &= h_4^{conv} A_y (T - T_\infty)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

e a uma condição inicial :

$$T|_{\tau=\tau_0} = T_0 \tag{3.3}$$

Aqui, h_i^{conv}, para $i = 1, 2, 3, 4$, é o coeficiente de transferência de calor convectivo $[W/(^oC \cdot m^2)]$ em cada contorno correspondente. A convecção natural sobe a superfície horizontal da placa é incluída como um termo fonte negativo em $g(z, y, \tau)$, tendo forma similar a (3.2), e o respectivo coeficiente de transporte seria:

$$h_{surface}^{conv} = \frac{\kappa}{L} \cdot 0.664\ Re^{1/2}\ Pr^{1/3} \tag{3.4}$$

em que Re é o *Número de Reynolds* associado, Pr é o *Número de Prandtl* e L é um comprimento característico $[m]$.

Para obter boas soluções para tal modelo, foi utilizada a Técnica de Volumes Finitos [105]. A discretização do domínio foi feita através de uma malha nove vezes a dimensão da instância teste, como na figura (3.1)

Todas as propriedades termo-físicas usadas para descrever condições do modelo térmico são dadas na tabela 3.1

Tabela 3.1: Thermo-physical properties for the thermal model.

Environment Temperature	25 ^oC
Total Dissipated Power	120 W
Lateral Board Dimension (L)	0.20 m
Thermal Conductivity (Glass Fiber - Epoxy)	$5.9 \cdot 10^{-1}\ W/(m \cdot K)$
Lateral Convective Heat Transfer Coefficients	$1.0 \cdot 10^{-4} W/(m^2 \cdot K)$

3.2.1 Temperatura Máxima e Custos de Penalização

Quando resolvidas as equações (3.1)-(3.4) pode-se determinar a máxima temperatura associada ao sistema eletrônico em projeto. Para cada atribuição x fixada pelo problema mestre de Benders (capítulo 2, equações (2.35)-(2.36)), um campo de temperatura diferente e uma temperatura máxima distinta devem ser encontrados. A garantia de convexidade da função $T_{max}(x)$ é virtualmente impossível, dada a distribuição discreta das fontes de calor, este fato praticamente exclui a possibilidade de solução exata direta do problema combinado.

Para melhorar a base de comparação e permitir tratar a temperatura máxima de modo heurístico, é proposta a seguir uma função que compute custos associados ao aumento da temperatura máxima do sistema:

$$c_{raise}^{Temp} = \begin{cases} 0 & , \text{for} \quad T_{max} < T_{threshold} \\ \mu(T_{max} - T_{threshold})^2 & , \text{for} \quad T_{max} \geq T_{threshold} \end{cases} \tag{3.5}$$

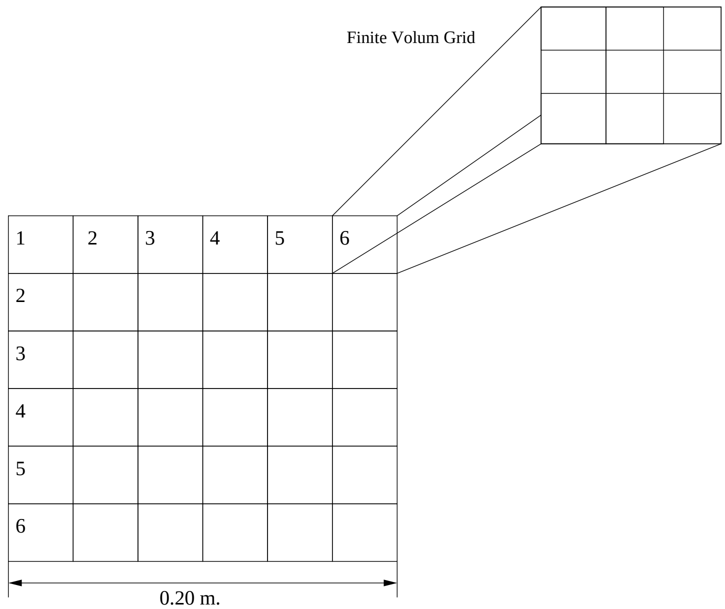

Figura 3.1: QAP instance and Finite Volume Grid representation.

Aqui, c_{raise}^{Temp} é o custo [$] associado com o aumento da temperatura máxima T_{max} além de uma limite de projeto, $T_{threshold}$, e μ é uma estimativa do custo adicional por grau célsius. Com o auxílio de tal função é seguro afirmar que a solução pareto-ótima do problema combinado está sempre entre dois limites: o limite inferior dado, pelo custo de localização, e o limite superior, dado pelo custo de localização somado ao custo térmico associado avaliado pela função (3.5).

Pode-se conceber então uma heurística de performance garantida para determinar boas soluções para o problema combinado. Definindo o limite inferior do problema combinado como a solução ótima do QAP:

$$LB \;=\; QAP_{optimal} \tag{3.6}$$

e o limite superior como:

$$UB \;=\; QAP_{optimal} \;+\; c_{raise}^{Temp} \tag{3.7}$$

pode-se escolher a melhor solução pesquisada como subótima:

$$BEST \;=\; (QAP \;+\; c_{raise}^{Temp})_{best}. \tag{3.8}$$

Para uma definição completa de algoritmo com garantia de performance, veja o texto completo em anexo. Uma ilustração do gerenciamento de limites sugerido é apresentada na figura (3.3)

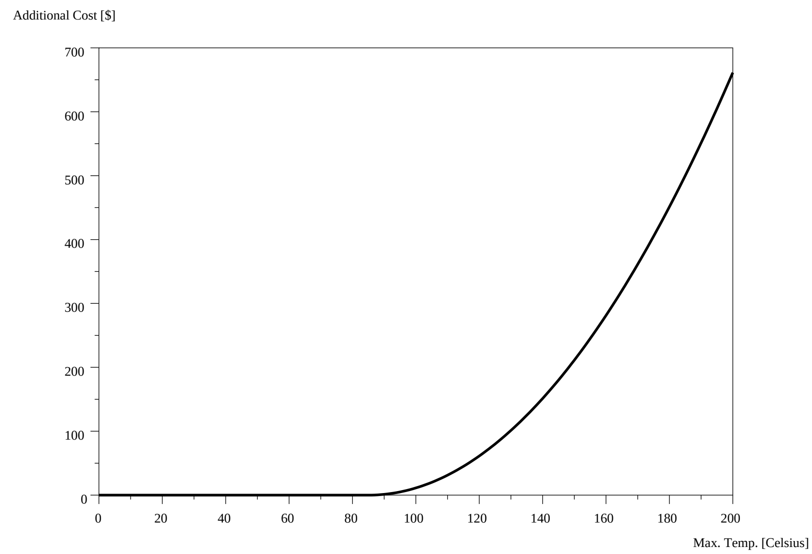

Figura 3.2: The penalty overheating cost function, for a threshold temperature of 85 Celsius.

3.3 Experiência Computacional

Apresenta-se um sumário da experiência computacional mostrada no capítulo 3 do texto completo, em anexo. Para uma descrição completa da experiência, veja a seção correspondente do texto completo em inglês.

Apresentamos na tabela 3.2 apresenta dados acerca das instâncias selecionadas para teste.

A maioria das grandezas necessárias para completar a descrição do modelo pode ser encontrada em [16]. As tabelas 3.3, 3.4 e 3.5 mostram os resultados obtidos. Entradas marcadas com "* "correspondem a instâncias não resolvidas em 24 horas de computação.

As figuras (3.4) e (3.5) ilustram variações nos tempos de computação à medida que a razão p/q aumenta. Nas figuras (3.6) e (3.7) observa-se os campos de temperatura para a instância *ste36a* resolvendo-se apenas o QAP e levando-se em conta o sobre-aquecimento.

Para uma visão mais detalhada das conclusões acerca deste experimento, ou uma análise mais profunda, deve-se consultar o capítulo 5 do documento anexo.

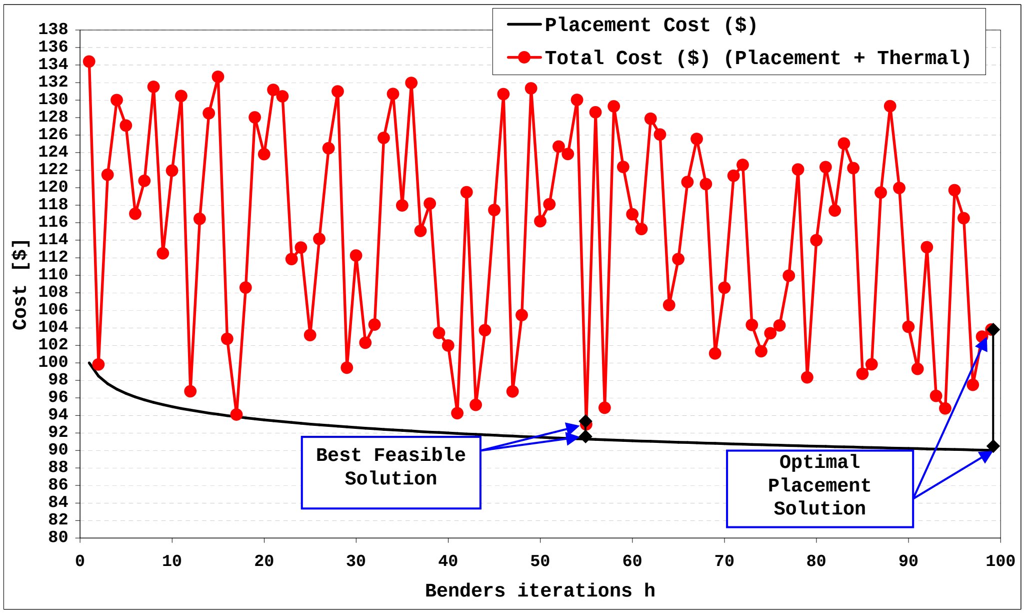

Figura 3.3: Evolution of bounds during the method execution.

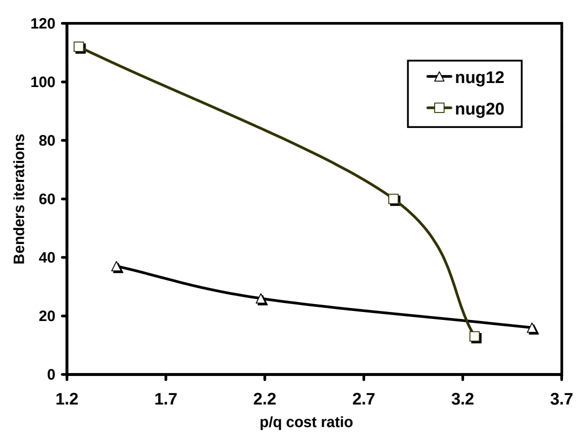

Figura 3.4: Number of Benders iterations versus p/q cost reason.

Tabela 3.2: Test instances for computational experiments.

Name	Size	Integer Variables	Continuous Variables	Fin. Vol. grid	Component Distribution
nug06	6	36	1296	54	3×2
tail06	6	36	1296	54	3×2
nug08	8	64	4096	72	3×2
tail08	8	64	4096	72	4×2
esc08a	8	64	4096	72	4×2
esc08b	8	64	4096	72	4×2
esc08c	8	64	4096	72	4×2
esc08d	8	64	4096	72	4×2
esc08e	8	64	4096	72	4×2
esc08f	8	64	4096	72	4×2
tail09	9	81	6561	81	3×3
tail10	10	100	10000	90	5×2
lipa10a	10	100	10000	90	5×2
lipa10b	10	100	10000	90	5×2
rou10	10	100	10000	90	5×2
scr10	10	100	10000	90	5×2
nug12	12	144	20736	108	4×3
tail12a	12	144	20736	108	4×3
rou12	12	144	20736	108	4×3
scr12	12	144	20736	108	4×3
nug20	20	400	160000	180	5×4
ste36a	36	1296	1679616	324	6×6
ste36b	36	1296	1679616	324	6×6
rpqa9	9	81	6561	81	3×3
rpqa16	16	256	65536	144	4×4
rpqa25	25	625	390625	225	5×5
rpqa36	36	1296	1679616	324	6×6

Tabela 3.3: Results for computational experiments - first set.

Name	Size	h	Optimal p/q cost ratio	Gap (%)	Time [s]
nug06	6	9	1.25	0	10
tail06	6	8	0.95	0	11
nug08	8	12	1.13	8.3	120
tail08	8	10	1.49	2.5	117
esc08a	8	3	1.36	0	118
esc08b	8	5	1.08	1.5	103
esc08c	8	4	0.99	0.5	115
esc08d	8	4	1.13	4.3	106
esc08e	8	5	1.15	9.7	98
esc08f	8	4	1.33	6.4	123
tail09	9	20	1.18	12.1	305
tail10	10	16	1.45	10.5	419
lipa10a	10	30	1.34	5.4	383
lipa10b	10	31	1.24	0.7	372
rou10	10	32	1.19	8.2	385
scr10	10	33	1.15	11.8	369
nug12	12	37	1.45	33.1	521
tail12a	12	26	1.14	25.6	483
rou12	12	40	1.05	18.6	454
scr12	12	30	1.12	30.5	427
nug20	20	112	1.26	24.3	6019
ste36a	36	*	*	*	*
ste36b	36	*	*	*	*
rpqa9	9	42	0.98	12.9	358
rpqa16	16	105	1.61	15.4	464
rpqa25	25	148	1.18	16.1	3348
rpqa36	36	*	*	*	*

Tabela 3.4: Results for computational experiments - second set.

Name	Size	h	Optimal p/q cost ratio	Gap (%)	Time [s]
nug06	6	7	2.12	1.1	10
tail06	6	8	2.87	0.8	12
nug08	8	9	2.44	0.5	30
tail08	8	5	2.72	0.7	109
esc08a	8	3	2.6	2.1	32
esc08b	8	4	2.94	0.6	64
esc08c	8	2	2.55	0.9	86
esc08d	8	2	2.46	0.7	7
esc08e	8	2	2.24	1.7	42
esc08f	8	4	2.11	1.3	35
tail09	9	11	2.01	0.4	105
tail10	10	12	2.57	0.6	296
lipa10a	10	15	2.62	5.4	374
lipa10b	10	16	2.63	0.3	340
rou10	10	20	2.66	12.5	333
scr10	10	16	2.05	11.8	298
nug12	12	26	2.18	8.8	160
tail12a	12	26	2.82	14.9	282
rou12	12	22	2.64	11.3	351
scr12	12	13	2.45	4.7	187
nug20	20	60	2.85	8.3	981
ste36a	36	237	2.58	22.1	1876
ste36b	36	213	2.79	19.4	1381
rpqa9	9	19	2.47	2.7	358
rpqa16	16	54	2.23	12.3	464
rpqa25	25	74	2.83	21.1	821
rpqa36	36	348	2.76	28.7	2971

Tabela 3.5: Results for computational experiments - third set.

Name	Size	h	Optimal p/q cost ratio	Gap (%)	Time [s]
nug06	6	2	3.02	0.1	4
tail06	6	3	3.76	1.2	6
nug08	8	3	3.29	9.0	2
tail08	8	5	3.21	12.1	6
esc08a	8	4	3.92	10.1	5
esc08b	8	2	3.07	3.1	15
esc08c	8	3	3.69	3.1	10
esc08d	8	3	3.78	10.1	1
esc08e	8	3	3.43	5.2	23
esc08f	8	2	3.29	8.1	5
tail09	9	5	3.16	7.0	77
tail10	10	12	3.72	11.0	170
lipa10a	10	10	3.42	17.3	124
lipa10b	10	11	3.94	4.3	115
rou10	10	12	3.21	5.6	162
scr10	10	14	3.86	14.1	187
nug12	12	16	3.55	3.0	93
tail12a	12	12	3.48	2.2	105
rou12	12	14	3.42	21.2	261
scr12	12	8	3.84	12.1	119
nug20	20	13	3.26	27.3	195
ste36a	36	118	3.81	15.3	1379
ste36b	36	147	3.99	27.2	1130
rpqa9	9	8	3.27	5.4	14
rpqa16	16	34	3.11	17.2	35
rpqa25	25	53	3.75	21.2	379
rpqa36	36	242	3.22	20.1	1234

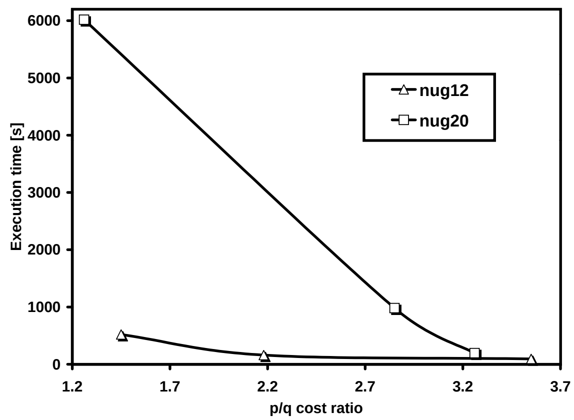

Figura 3.5: Execution time [s] versus p/q cost reason.

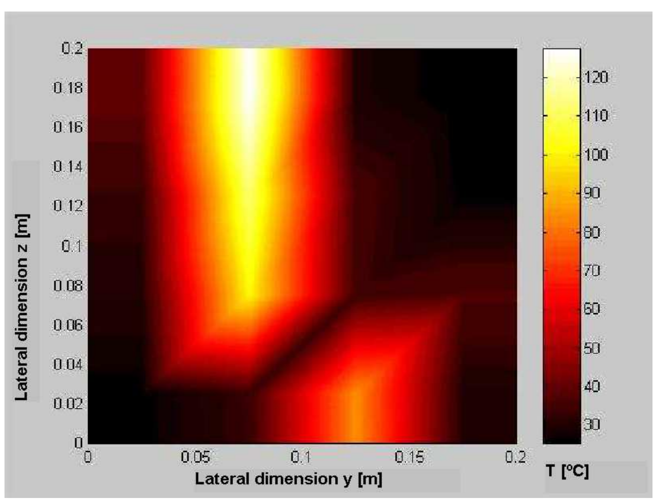

Figura 3.6: Temperature field for *ste36a* placement solution without overheating penalty.

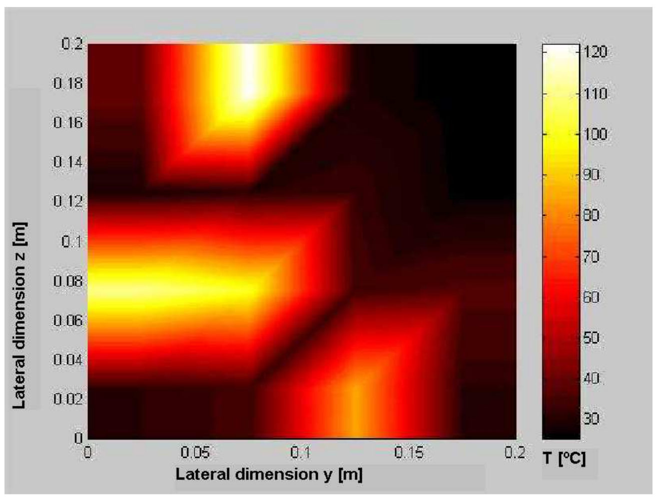

Figura 3.7: Temperature field for *ste36a* placement solution considering overheating penalty.

Capítulo 4

Projeto de Redes com Custos de Congestionamento

4.1 Introdução

O problema de projeto de redes consiste em ligar um servidor aos seus diversos clientes, satisfazendo a demanda a mínimo custo. Cada arco da rede teria três custos associados: um custo operacional variável por unidade de fluxo, um custo fixo de instalação de infraestrutura e um custo não-linear de congestionamento, que penaliza fluxos próximos de níveis de capacidade implícitos.

Este problema pode ser visto como uma generalização do problema da árvore de Steiner em um grafo direcionado [83]. De fato, ao desconsiderar custos variáveis nos arcos, tem-se basicamente o problema de Steiner [85, 124, 66, 67, 74, 81]. Desprezados os custos fixos, tem-se um problema de transbordo de fonte única [40].

Para uma boa revisão da literatura disponível sobre este tema ou assuntos correlatos, deve-se citar [68], [57], [119], [71], [42], [46, 47, 48], [56], [116], [55], [35], [49] e [62] .

Uma ilustração do tipo de estrutura proposta pode ser vista na figura 4.1

4.2 Uma Formulação de Fluxos Multiproduto

Seja um grafo $G(V, E)$, onde o nodo de origem é denotado por o, a ser ligado a um número de $|K|$ nodos de demanda, cada qual com demanda d_k onde $k \in K$ e $K \subseteq V$.

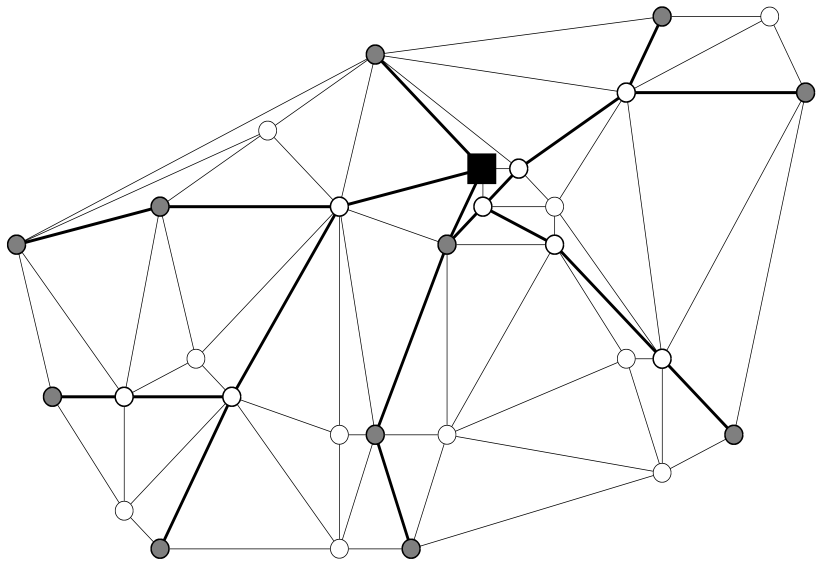

Figura 4.1: The tree network design problem.

4.2.1 Variáveis e Parâmetros

Define-se as variáveis:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se um arco direcionado é instalado em } (i,j) \\ 0 & \text{se não;} \end{cases}$$

f_{ijk}: fluxo para o nodo de demanda k, passante no arco (i,j);

g_{ij}: fluxo total no arco (i,j).

e também os seguintes parâmetros:

b_{ij}: custo fixo de instalação do arco (i,j); $b_{ij} = \beta\, d_{ij}$ onde d_{ij} é a distância em metros entre i e j, e β é o custo de instalação por metro.

c_{ijk}: custo variável por unidade de fluxo do produto k no arco (i,j); $c_{ijk} = \gamma^k\, d_{ij}\,, \quad \forall k \in K$.

O modelo permite que os custos variáveis dependam tanto do produto quanto do arco. Se o custo variável depende do produto, basta fazer $\gamma^k = \gamma,\ \forall k$. Assume-se que em cada arco (i,j), é dada uma função crescente $\tau_{ij}(g_{ij})$.

A função de custos de alocação de banda e congestionamento é assumida separável nos arcos, e cada parcela $\tau_{ij}(g_{ij})$ qualidade de serviço e custo de expansão de capacidade no arco (i,j).

4.2.2 Um Programa Não-Linear Inteiro Misto

O modelo matemático M é:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} [b_{ij}x_{ij} + \tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k\in K} c_{ijk}f_{ijk}] \tag{4.1}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in K} f_{ijk} - g_{ij} &\leq 0\,, \quad \forall (i,j)\in E && (4.2)\\
-\sum_{(o,j)\in E} f_{ojk} &= -d_k\,, \quad \text{para o nodo } o \text{ e } \forall k\in K && (4.3)\\
\sum_{(i,k)\in E} f_{ikk} &= d_k\,, \quad \forall k\in K && (4.4)\\
\sum_{(i,j)\in E} f_{ijk} - \sum_{(j,l)\in E} f_{jlk} &= 0\,, \quad \forall j\in V-\{o\}\,\text{e}\,j\neq k\,\text{e}\,\forall k\in K && (4.5)\\
f_{ijk} &\leq d_k\,x_{ij}\,, \quad \forall (i,j)\in E \text{ e } \forall k\in K && (4.6)\\
f_{ijk} &\geq 0\,, \quad \forall (i,j)\in E\,\text{e}\,\forall k\in K && (4.7)\\
g_{ij} &\geq 0\,, \quad \forall (i,j)\in E && (4.8)\\
x_{ij} &\in \{0,1\}\,, \quad \forall (i,j)\in E && (4.9)
\end{aligned}$$

Para uma descrição detalhada de cada restrição do modelo, consulte a documentação em inglês em anexo.

4.2.3 Theoretical Properties of the Linear and the Concave Versions

É importante observar que a relaxação contínua deste modelo gera um politopo quase-integral [61]. Para $\tau_{ij}(g_{ij}) = 0$, $\beta = 0$ and $d_k = 1, \forall k \in K$ o modelo se reduz à formulação multiproduto do problema de Steiner [38, 125, 86, 54], [84].

Outro resultado importante está relacionado ao problema de fonte única com custos côncavos, para o qual pode ser mostrado que existe uma arborescência associada à topologia ótima [111].

4.2.4 Convexificação dos Custos de Alocação de Banda e Congestionamento

O principal objetivo agora é viabilizar a solução do programa não-linear inteiro misto proposto, o que implica investir na convexificação da função integrada para custos de alocação de banda e congestionamento. O sucesso dessa empreitada garante a possibilidade de uso da técnica de decomposição de Benders generalizada, proposta por Geoffrion [50]. A função escolhida aqui para representar os custos de congestionamento é bem conhecida função de atraso de Kleinrock [53]. A técnica de convexificação escolhida é tratada em detalhes no trabalho de [82].

Para uma discussão detalhada de tal técnica de convexificação, consulte a seção correspondente no documento anexo. A figura 4.2 apresenta a função de custo integrada.

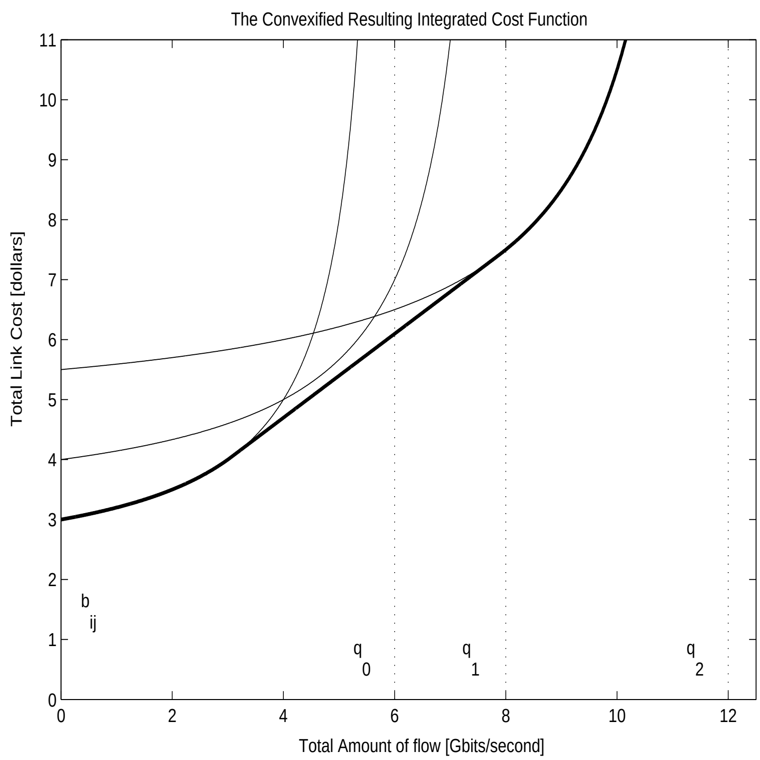

Figura 4.2: An example of convexified integrated leasing and congestion cost function.

4.3 Decomposição de Benders

O método de Benders data de 1962 [17], e recebeu as diversas contribuições ao longo dos últimos 40 anos, destacando-se os trabalhos de Geoffrion e Graves [52], Magnanti and Wong [87], e outros [88]. O método de decomposição generalizada de Benders foi proposto no trabalho de Geoffrion [50].

4.3.1 Manipulando o Problema

O método de Benders consiste de técnicas de projeção, dualização, linearização externa e relaxação. Concebendo uma projeção do problema M no espaço das variáveis topológicas

x, tem-se o seguinte problema a resolver no nível superior:

$$\min_{x \in X} \sum_{(i.j) \in E} b_{ij}\, x_{ij} \; + \; v(x) \tag{4.10}$$

onde $X = \{x \mid$ para x fixo tal que existe fluxos que satisfazem $(4.2) - (4.8)\}$ e onde $v(x)$ é dado pelo seguinte problema, resolvido no nível inferior:

$$v(x) = \min_{(f,g) \in G} \sum_{(i,j) \in E} [\tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k \in K} c_{ijk} f_{ijk}] \text{ sujeito a (4.6) para } x \text{ fixo} \tag{4.11}$$

onde $G = \{(f,g) \mid f \geq 0 \text{ and } g \geq 0 \text{ satisfazendo } (4.2) - (4.5)\}$.

Aqui cabe observar que devido às propriedades matemáticas da formulação em questão, as condições de Karush-Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes para garantir a otimalidade do esquema de decomposição proposto. Não havendo "gap"de dualidade, o valor ótimo do subproblema é dado por:

$$v(x) = \max_{\lambda \geq 0} [\min_{(f,g) \in G} \sum_{(i,j) \in E} [\tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k \in K} c_{ijk} f_{ijk} + \sum_{k \in K} \lambda_{ijk}(f_{ijk} - d_k x_{ij})] \tag{4.12}$$

ou

$$\begin{aligned} v(x) = \max_{\lambda \geq 0} [\sum_{(i,j) \in E} \sum_{k \in K} -\lambda_{ijk} d_k x_{ij} \; + \\ \min_{(f,g) \in G} \sum_{(i,j) \in E} [\tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k \in K} (c_{ijk} + \lambda_{ijk}) f_{ijk}] \end{aligned} \tag{4.13}$$

O problema completo é então equivalente a:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \{ \sum_{(i.j) \in E} b_{ij} x_{ij} \; + \max_{\lambda \geq 0} [\sum_{(i,j) \in E} \sum_{k \in K} -\lambda_{ijk} d_k x_{ij} + \\ \min_{(f,g) \in G} \sum_{(i,j) \in E} [\tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k \in K} (c_{ijk} + \lambda_{ijk}) f_{ijk}]\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

isto é, (4.1)-(4.9) são equivalentes ao seguinte problema mestre de Benders:

$$\min_{t, x \in X} \sum_{(i.j) \in E} b_{ij}\, x_{ij} + t \tag{4.15}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} t \geq \sum_{(i,j) \in E} \sum_{k \in K} -\lambda_{ijk}\, d_k\, x_{ij} \; + \\ \min_{(f,g) \in G} \sum_{(i,j) \in E} [\tau_{ij}(g_{ij}) \; + \sum_{k \in K} (c_{ijk} + \lambda_{ijk}) f_{ijk}] \text{ for all } \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Em uma dada iteração h, o valor ótimo de $v(x^h)$ ocorre para $\lambda = \lambda^h$ e é dado por:

$$v(x^h) = -\sum_{(i,j)\in E}\sum_{k\in K}\lambda^h_{ijk}\, d_k\, x^h_{ij} + \min_{(f,g)\in G}\sum_{(i,j)\in E}[\tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k\in K}(c_{ijk} + \lambda^h_{ijk})f_{ijk}] \tag{4.17}$$

de (4.17) segue que associado com λ^h tem-se a restrição:

$$t \geq -\sum_{(i,j)\in E}\sum_{k\in K}\lambda^h_{ijk}\, d_k\, x_{ij} + \min_{(f,g)\in G}\sum_{(i,j)\in E}[\tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k\in K}(c_{ijk} + \lambda^h_{ijk})f_{ijk}] \tag{4.18}$$

do que deriva o corte de Benders:

$$t \geq v(x^h) + \sum_{(i,j)\in E}\sum_{k\in K}\lambda^h_{ijk}\, d_k\,(x^h_{ij} - x_{ij}) \tag{4.19}$$

4.3.2 Subproblemas

Para uma arborescência fixa A^h associada a um vetor x^h, a computação de um fluxo de custo mínimo $v(x^h)$ pode ser separada em uma série de problemas triviais de fluxos em redes. Seja C^h_{ok} o caminho do nodo de origem até o nodo de demanda k. Então o subproblema e ser resolvido é:

$$\min_{g\geq 0, f\geq 0}\sum_{(i,j)\in E}[\tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k\in K} c_{ijk}\, f_{ijk}] \tag{4.20}$$

sujeito às restrições de acoplamento (4.2):

$$\sum_{k\in K} f_{ijk} - g_{ij} \;\; \leq \;\; 0\,, \quad \forall (i,j)\in E$$

e às restrições (4.3) a (4.6) para $x = x^h$.

Um único fluxo $f_{ijk} = d_k$ pode ser associado a cada arco do nodo de origem o até o nodo de demanda k, resultando numa única solução ótima (f^h, g^h) associada com x^h. Dualizando o subproblema com relação à restrição de acoplamento (4.2), o valor ótimo de $v(x^h)$ pode ser calculado por:

$$v(x^h) = \max_{\theta\geq 0} d(\theta) \tag{4.21}$$

onde a função dual $d(\theta)$ é avaliada induzindo a inerente separabilidade do fluxo por produto:

$$d(\theta) = \min_{g\geq 0, f\geq 0} \sum_{(i,j)\in E} [\tau_{ij}(g_{ij}) + \sum_{k\in K} c_{ijk}\, f_{ijk}] + \sum_{(i,j)\in E} \theta(\sum_{k\in K} f_{ijk} - g_{ij})$$

logo:

$$d(\theta) = \sum_{k\in K} \min_{f_k\geq 0} \sum_{(i,j)\in E} (c_{ijk} + \theta_{ij}) f_{ijk} + \sum_{(i,j)\in E} \min_{g_{ij}\geq 0} (\tau_{ij}(g_{ij}) - \theta_{ij} g_{ij}) \tag{4.22}$$

Para uma solução ótima (f^h, g^h) para o subproblema primal (4.20)-(4.2), uma solução ótima associada θ^h deve minimizar para cada $g_{ij} \in E$ a parcela correspondente da função Lagrangeana (4.22):

$$\theta_{ij}^h = \tau'(g_{ij}^h) \quad \forall (i,j) \in E \tag{4.23}$$

Pode-se definir então o par primal-dual a ser resolvido separadamente para cada produto $k \in K$

Subproblema Primal Para o Produto k

$$\min \sum_{(i,j)\in E} (c_{ijk} + \theta_{ij}^h) f_{ijk}^h \tag{4.24}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
-\sum_{(o,j)\in E} f_{ojk}^h &= -d_k \quad \text{para o nodo } o && (4.25)\\
\sum_{(i,k)\in E} f_{ikk}^h &= d_k && (4.26)\\
\sum_{(i,j)\in E} f_{ijk}^h - \sum_{(j,l)\in E} f_{jlk}^h &= 0 \quad \forall j \in V - \ o \,\text{e}\, j \neq k && (4.27)\\
-f_{ijk}^h &\geq -d_k\, x_{ij}^h \quad \forall (i,j) \in E && (4.28)\\
f_{ijk}^h &\geq 0 \quad \forall (i,j) \in E && (4.29)
\end{aligned}$$

cuja solução única e trivial seria:

$$f_{ijk}^h = \begin{cases} d_k & \text{se}\, (i,j) \in C_{ok}^h \subseteq A^h \\ 0 & \text{se não} \end{cases} \tag{4.30}$$

Subproblema Dual Para o Produto k

$$\max_{p^h,\lambda^h \geq 0} d_k(p^h_{kk} - p^h_{ok} - \sum_{(i,j)\in E} x^h_{ij}\,\lambda^h_{ijk}) \tag{4.31}$$

sujeito a:

$$p^h_{jk} - p^h_{ik} - \lambda^h_{ijk} \;\; \leq \;\; c_{ijk} + \theta^h_{ij} \quad \forall (l,j) \in E \tag{4.32}$$

Da complementaridade de folgas:

$$p^h_{jk} - p^h_{ik} - \lambda^h_{ijk} = c_{ijk} + \theta^h_{ij} \quad \forall (i,j) \in C^h_{ok} \subset A^h \tag{4.33}$$

pode-se então construir a seguinte solução viável:

$$\begin{aligned}
p^h_{ok} &= 0 \quad \forall k \in K, \text{ para a origem } o && (4.34)\\
p^h_{jk} &= p^h_{ik} + c_{ijk} + \theta^h_{ij}, \quad \forall (i,j) \in C^h_{ok} \subset A^h && (4.35)\\
p^h_{ik} &= p^0_{ik}, \quad \forall i \in V - V^h && (4.36)\\
\lambda^h_{ijk} &= 0, \quad \forall (i,j) \in C^h_{ok} \subset A^h && (4.37)\\
\lambda^h_{ijk} &= p^h_{jk} - p^h_{ik} - c_{ijk} - \theta^h_{ij}, \; \forall (i,j) \in E - A^h && (4.38)\\
& \quad \text{tal que } \; p^h_{jk} - p^h_{ik} > c_{ijk} + \theta^h_{ij} &&\\
\lambda^h_{ijk} &= 0, \quad \forall (i,j) \in E - A^h \text{ tal que } p^h_{jk} - p^h_{ik} \leq c_{ijk} && (4.39)
\end{aligned}$$

4.3.3 Problema Mestre

O problema mestre dado a seguir contém algumas restrições redundantes de modo a tentar assegurar a viabilidade no nível inferior da topologia proposta no nível superior. Tal problema extendido é chamado de *MBend*:

$$\begin{aligned}
\sum_{(o,j)\in E} x_{oj} &\geq 1\,, \quad \text{para o nodo } o && (4.40)\\
\sum_{(i,k)\in E} x_{ik} &= 1\,, \quad \forall k \in K && (4.41)\\
\sum_{(l,j)\in E} x_{lj} - \sum_{(i,l)\in E} x_{il} &\geq 0\,, \quad \forall l \in V - K - o && (4.42)\\
\sum_{(i,l)\in E} x_{il} &\geq \frac{\sum_{(l,j)\in E} x_{lj}}{\sum_{(l,j)\in E} 1}\,, \quad \forall l \in V - K - o && (4.43)\\
x_{ij} + x_{ji} &\leq 1\,, \quad \forall (i,j) \in E && (4.44)
\end{aligned}$$

com a função objetivo:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} b_{ij}x_{ij} + t \tag{4.45}$$

e sujeito aos cortes de Benders:

$$t \geq v(x^h) - \sum_{(i,j)\in E} \sum_{k\in K} \lambda_{ijk}^h \, d_k \, x_{ij} \quad h = 0, 1, 2, ..., H \tag{4.46}$$

4.3.4 Algoritmo

Recomenda-se consultar o texto anexo para uma visão detalhada do algoritmo de Benders proposto.

4.3.5 Evitando ciclos

O modelo *MBend* usa as restrições (4.45 - 4.49) para garantir a viabilidade da solução computada no nível superior. Todavia, dependendo da estrutura da rede potencial e da estrutura do vetor de demandas, as restrições (4.45 - 4.49) não são poderosas o bastante para evitar a produção de soluções que contenham ciclos. Para evitar esforço computacional desnecessário, desenvolve-se aqui uma estratégia alternativa que aproveita a ligação entre as variáveis f_{ijk} e g_{ij} para construir um novo problema mestre. Este novo modelo é chamado *MMBend*:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} b_{ij}x_{ij} + t \tag{4.47}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
-\sum_{(o,j)\in E} g_{oj} &= -\sum_{k\in K} d_k & (4.48)\\
\sum_{(i,k)\in E} g_{ik} - \sum_{(k,j)\in E} g_{kj} &= d_k\,, \quad \forall k \in K & (4.49)\\
\sum_{(i,j)\in E} g_{ij} - \sum_{(j,l)\in E} g_{jl} &= 0\,, \quad \forall j \in V - K - \{o\} & (4.50)\\
g_{ij} &\leq \sum_{k\in K} d_k \, x_{ij}\,, \quad \forall (i,j) \in E & (4.51)\\
g_{ij} &\geq 0\,, \quad \forall (i,j) \in E & (4.52)\\
x_{ij} &\in \{0,1\}\,, \quad \forall (i,j) \in E & (4.53)
\end{aligned}$$

e o corte de Benders:

$$t \geq v(x^h) - \sum_{(i,j)\in E} \sum_{k\in K} \lambda_{ijk}^h \, d_k \, x_{ij} \quad h = 0, 1, 2, ..., H \tag{4.54}$$

Este modelo força o balanço de fluxos no nível superior através das restrições (4.53)-(4.57), garantindo a viabilidade estrutural de x.

4.4 Resultados Computacionais

Teste computacionais foram conduzidos com o auxílio de uma implementação através da interface para programação de aplicativos do pacote open-source *GLPK 3.1* [89].

Apresenta-se aqui um relatório sumário de tais experiências, devendo-se consultar a seção correspondente do texto anexo para uma visão mais detalhada.

A tabela apresenta as instâncias selecionadas para teste e seus respectivos tamanhos. A seleção de instâncias está relacionada aos trabalhos [3], [15] e [113].

O "gap"entre existente entre a solução linear e a solução não-linear foi definido como:

$$GAP = 100\left(\frac{Optimum_{nonlinear} - Optimum_{linear}}{Optimum_{linear}}\right) \tag{4.55}$$

Uma síntese dos experimentos produzidos pode ser observada nas tabelas 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5. A análise da significância de tais resultados, bem como dos padrões utilizados para obtê-los pode ser vista na seção correspondente do texto completo em anexo.

4.5 Conclusões

De modo geral a abordagem proposta para a solução de programas não-lineares inteiros mistos como o modelo de projeto de redes com custos de congestionamento se comporta bem, e o esquema de decomposição de Benders generalizado é bem sucedido ao tratar um problema de tais características.

Este fato ganha relevância uma vez que os expressivos resultados foram obtidos dispensando a ajuda de pacotes comerciais.

A seção correspondente do texto completo lista e analisa um leque maior de conclusões.

	Problem Number	$\|V\|$	$\|E\|$	$\|K\|$	β/γ	Number of Variables in Model M Integer	Continuous
CLASS 1	1	12	36	3	1	36	108
	2	16	30	4	1	30	120
	3	16	60	4	1	60	240
	4	20	60	3	1	60	180
	5	25	80	4	1	80	320
	6	30	90	5	1	90	450
	7	35	100	6	1	100	600
	8	40	110	7	1	110	770
	9	46	120	8	1	120	960
	10	50	130	8	1	130	1040
	11	55	140	8	1	140	1120
	12	60	150	9	1	150	1350
	13	65	170	10	1	170	1700
	14	70	200	12	1	200	2400
	15	80	220	12	1	220	2640
CLASS 2	16	10	21	8	10	21	168
	17	12	26	10	10	26	260
	18	14	31	12	10	31	372
	19	16	36	14	10	36	504
	20	18	40	16	10	40	640
	21	20	48	18	10	48	864
	22	21	52	19	10	52	988
	23	22	55	20	10	55	1 100
	24	24	47	22	10	47	1 034
	25	25	50	20	10	50	1 000
CLASS 3	B1	50	126	8	10	126	1 008
	B2	50	126	12	10	126	1 512
	B5	50	200	12	10	200	2 400
	B6	50	200	24	10	200	4 800
	B16	100	200	16	10	200	3 200

Tabela 4.1: Network Dimensions for Test Problems.

Problem Number	Original Formulation			Cycle Avoiding Formulation	
	Iterations	For Cycle Avoiding	Time $[s]$	Iterations	Time $[s]$
1	5	0	3.6	4	3.26
2	5	0	4.28	5	3.54
3	6	0	4.3	4	3.1
4	5	0	12.2	3	6.22
5	5	0	15.5	2	7.68
6	6	0	20.86	3	11.9
7	7	0	25.06	5	19.2
8	5	0	23.06	7	30.72
9	6	0	76.82	4	70.02
10	7	0	324	3	231.8
11	5	0	274.66	4	256.42
12	4	0	479	5	411.88
13	7	0	687.64	3	684.68
14	5	0	690.5	3	713
15	6	0	741	3	773.84
16	39	2	36.68	16	42.28
17	79	4	72.6	17	79.44
18	78	31	136.9	15	134.3
19	62	9	138.06	22	127.56
20	234	14	693.9	115	599.28
21	41	10	456.42	23	435.1
22	31	8	609.18	15	656.5
23	120	6	734.76	76	753.56
24	86	7	753.8	53	717.72
25	112	11	836.18	85	833.28
B1	5	0	18.86	3	19.78
B2	6	0	18.6	4	13.98
B5	3	0	130.7	3	141.24
B6	4	0	370.58	5	355.06
B16	6	0	418.74	5	364.56

Tabela 4.2: Average computing time, number of Benders iterations and number of cycle avoiding constraints for experiments 1 to 5.

Problem Number	Cycle Avoiding Formulation		Linear Results		Nonlinear/linear GAP (%)	Number of Different Arcs
	Iterations	Time $[s]$	Iterations	Time $[s]$		
1	4	3.26	5	3.3	24.742	2
2	5	3.54	6	2.92	25.94	4
3	4	3.1	4	3.28	15.386	3
4	3	6.22	5	7.08	26.096	2
5	2	7.68	5	7.86	25.91	3
6	3	11.9	5	14.34	25.25	3
7	5	19.2	7	18.58	24.818	4
8	7	30.72	7	25.42	24.532	3
9	4	70.02	4	72.68	16.912	3
10	3	231.8	5	217.4	24.764	5
11	4	256.42	7	244.12	25.138	3
12	5	411.88	4	432.8	26.65	3
13	3	684.68	7	618.76	25.824	6
14	3	713	5	700.8	24.642	4
15	3	773.84	5	789.4	25.012	2
16	16	42.28	19	45.32	26.23	5
17	17	79.44	18	82.44	24.96	4
18	15	134.3	19	118	25.784	4
19	22	127.56	27	118.48	24.456	2
20	115	599.28	116	573.52	34.728	3
21	23	435.1	28	416.58	25.63	6
22	15	656.5	21	621.88	25.896	5
23	76	753.56	77	799.96	16.188	3
24	53	717.72	56	763	25.558	2
25	85	833.28	93	854.94	24.434	6
B1	3	19.78	5	18.96	25.788	6
B2	4	13.98	6	15.98	14.788	5
B5	3	141.24	3	160.98	24.948	5
B6	5	355.06	3	358.18	34.822	3
B16	5	364.56	3	367.58	25.954	6

Tabela 4.3: Average computing time, number of Benders iterations, Nonlinear/linear gap and number of different arcs for experiments 1 to 5.

Problem Number	Original Formulation			Cycle Avoiding Formulation	
	Iterations	For Cycle Avoiding	Time $[s]$	Iterations	Time $[s]$
1	6	0	4.6	7	3.4
2	5	0	4.8	7	4.4
3	11	0	5.5	7	3.4
4	6	0	12.9	4	5.8
5	5	0	16.5	2	7.5
6	10	0	22.4	3	11.8
7	11	0	27	6	19.6
8	4	0	24.2	9	30.9
9	10	0	78.6	4	69.7
10	9	0	325.5	3	231.5
11	7	0	275.7	6	255.5
12	8	0	480.3	5	412.2
13	12	0	687.3	2	685.4
14	6	0	689.3	5	712.7
15	9	0	742.3	6	774.7
16	41	4	37.2	18	41.3
17	82	4	73.7	18	79.4
18	80	40	137.9	16	135
19	65	12	139.7	25	127.8
20	234	16	694.7	117	599.9
21	46	11	457.7	24	438.5
22	34	10	607.3	16	656.1
23	120	8	735.1	77	746
24	85	7	754.4	57	717.6
25	115	12	837.4	89	833.2
B1	6	0	20.1	3	19.5
B2	6	0	20.6	7	14.4
B5	4	0	131.8	5	140.6
B6	9	0	383.2	5	354.2
B16	8	0	420.2	6	365.9

Tabela 4.4: Computing time, number of Benders iterations, number of cycle avoiding constraints for experiment 6.

Problem Number	Cycle Avoiding Formulation		Linear Results		Nonlinear/linear GAP (%)	Number of Different Arcs
	Iterations	Time [s]	Iterations	Time [s]		
1	7	3.4	4	3.3	71.32	3
2	7	4.4	8	3	37.57	5
3	7	3.4	3	4.5	55.54	3
4	4	5.8	6	7.7	33.94	3
5	2	7.5	6	7.5	57.13	3
6	3	11.8	6	15.3	57.05	3
7	6	19.6	7	19.3	81.2	5
8	9	30.9	9	25.2	60.19	4
9	4	69.7	4	72.9	42.26	3
10	3	231.5	6	218.8	58.68	6
11	6	255.5	8	245.5	32.55	3
12	5	412.2	4	434.1	58.4	3
13	2	685.4	7	619.4	42.55	7
14	5	712.7	4	701.6	35.01	5
15	6	774.7	8	790.1	59.89	2
16	18	41.3	21	46.1	57.95	5
17	18	79.4	17	84.1	73.9	5
18	16	135	19	117.3	77.74	4
19	25	127.8	26	119.8	56.3	3
20	117	599.9	117	574.1	77.29	4
21	24	438.5	29	416.9	61.68	7
22	16	656.1	21	622	63.77	5
23	77	746	79	801	37	4
24	57	717.6	58	764	34.91	3
25	89	833.2	95	854.7	76.39	6
B1	3	19.5	7	20.3	55.25	6
B2	7	14.4	6	15.1	83.27	5
B5	5	140.6	4	162.9	42.75	5
B6	5	354.2	5	357.9	39.59	4
B16	6	365.9	3	369.3	39.3	7

Tabela 4.5: Computing time, number of Benders iterations, and Nonlinear/linear gap for experiment 6.

Capítulo 5

Integrando Localização de Facilidades e Projeto de Redes

5.1 Introdução

Como apontado no capítulo 1, o principal objetivo deste trabalho é lidar com uma combinação de projeto de redes e localização de facilidades, caracterizada como QAP. Nossa motivação é o projeto de um sistema de dois níveis: o alto nível, tipicamente a rede servidor-servidor, onde se escolhe a localização ótima de todos os servidores, e o baixo-nível, tipicamente a rede cliente-servidor, onde se busca o desenho de rede ótimo, naturalmente avaliando custos de congestionamento. Este problemas não podem ser resolvidos de forma independente, uma vez que a localização dos servidores impacta projeto de rede local, e vice-versa (ver figuras (5.3) e (5.4)).

Problemas que envolvem localização de facilidades e projeto de redes surgem nas mais diversas áreas de aplicação. O projeto de "Sistemas Eixo-e-Raio"(do inglês, "Hub-and-Spoke Systems") é uma pedra fundamental para otimização de tráfego aéreo, podendo também ser aplicado a área de logística. Uma boa revisão da literatura sobre modelos de tais sistemas deve incluir O'Kelly [98] [99] [102] [101], O'Kelly and Skorin-Kapov [100], Aykin [7] [8] [9], Zapfel e Wasner [126], Drezner e Wesolowsky [41], Campbel [32] [33] [31] e Pirkul et al. [106] [107]. Destacam-se também os trabalhos de Daskin e Melkote [94] [93].

Pode-se ter todos os tipos de redes locais, como se pode ver na figura (5.1) [73]. Mas os modelos clássicos de sistemas Eixo-e-Raio usam sempre a rede local tipo "estrela". Isto decorre do nicho de aplicação clássico de tais modelos, o tráfego aéreo. Os primeiros modelos de programação quadrática inteira mista para estes sistemas foram propostos por Aykin [8] e O'Kelly [99]. Modelos e linearizações mais recentes são abordados por Campbell [33] em seus trabalhos. Destacam-se em particular o *p-Hub Median Problem* e o

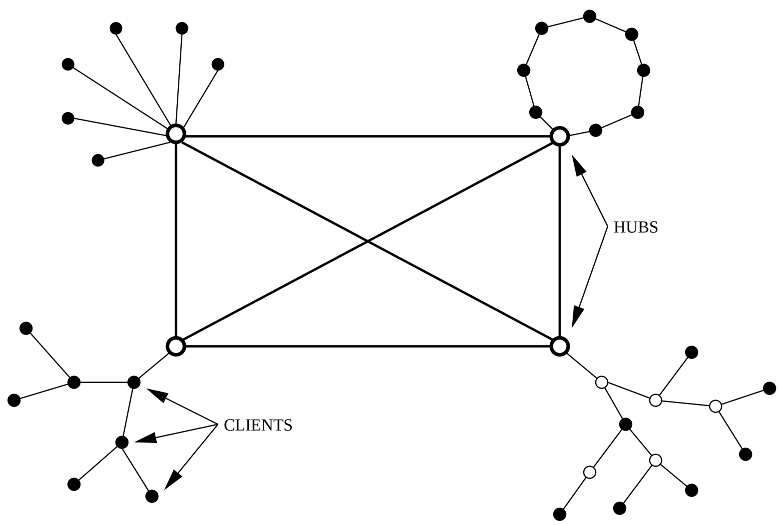

Figura 5.1: Hub-and-spoke system with different kinds of local access networks.

Uncapacitated Hub Location Problem.

5.2 Formulações de Programação Matemática

Para associar o problema de projeto de redes locais ao QAP, imagina-se primeiro uma cidade, estado ou região como alvo de nossa experiência. Pontos que são origem ou destino de algum fluxo de produtos estão dispersos sobre esta região, que também contém um conjunto de locais candidatos a receber servidores (figura (5.3)).

Os modelos tradicionais de sistemas "Eixo-e-Raio" otimizam também a atribuição cliente-servidor. Esta tarefa é de baixo custo uma vez que a rede local tem o desenho mais simples possível. Neste modelos um par de clientes $i, j \in I$ é interconectado por uma estrutura que pode conter um ou dois servidores $k, l \in K$. Usualmente multiplicam-se duas variáveis $0-1$ que representam atribuições cliente-servidor para desenhar a interconexão entre clientes. As versões linearizadas apenas substituem o produto $x_{ik}x_{lj}$ por uma variável f_{ijkl} que descreve o fluxo entre origem i e destino j roteado através do par de servidores $k - l$.

Uma matriz de custos c_{ijkl} é então construída somando os custos de interconexão: $c_{ijkl} = c_{ik} + c_{kl} + c_{lj}$. Se o número de servidores a localizar é conhecido, tem-se o *p-Hub Median Problem*, escrito aqui através de uma formulação de fluxos:

$$\min \sum_{k \in K} a_k x_k + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \sum_{l \in K} c_{ijkl} f_{ijkl} \tag{5.1}$$

sujeito a:

$$\sum_{k\in K} x_k = p \tag{5.2}$$

$$\sum_{k\in K} f_{ijkl} \leq w_{ij}x_l \ , \ \forall i,j \in I, i \neq j \ , \ l \in K \tag{5.3}$$

$$\sum_{l\in K} f_{ijkl} \leq w_{ij}x_k \ , \ \forall i,j \in I, i \neq j \ , \ k \in K \tag{5.4}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{l\in K} f_{ijkl} = w_{ij} \tag{5.5}$$

$$f_{ijkl} \geq 0 \ , \ \forall i,j \in I, \ k,l \in K \tag{5.6}$$

$$x_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K \tag{5.7}$$

Se o número de servidores a instalar deve ser determinado, tem-se o *Uncapacitated Hub Location Problem*:

$$\min \sum_{k\in K} a_k x_k + \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in K}\sum_{l\in K} c_{ijkl} f_{ijkl} \tag{5.8}$$

sujeito a:

$$\sum_{k\in K} x_k \leq |K| \tag{5.9}$$

$$\sum_{k\in K} f_{ijkl} \leq w_{ij}x_l \ , \ \forall i,j \in I, i \neq j \ , \ l \in K \tag{5.10}$$

$$\sum_{l\in K} f_{ijkl} \leq w_{ij}x_k \ , \ \forall i,j \in I, i \neq j \ , \ k \in K \tag{5.11}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{l\in K} f_{ijkl} = w_{ij} \tag{5.12}$$

$$f_{ijkl} \geq 0 \ , \ \forall i,j \in I, i \neq j \ , \ k,l \in K \tag{5.13}$$

$$x_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K \tag{5.14}$$

Como estes problemas tem grande proximidade com o *QAP*, é simples obter um esquema de decomposição de Benders para os mesmos. Fixando as variáveis estruturais x, para o *p-Hub Median Problem*, o subproblema primal é dado por:

$$\min \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in K}\sum_{l\in K} c_{ijkl} f_{ijkl} \tag{5.15}$$

sujeito a:

$$\sum_{k\in K} f_{ijkl} \leq w_{ij}x_l^h \ , \ \forall i,j \in I, i \neq j \ , \ l \in K \tag{5.16}$$

$$\sum_{l\in K} f_{ijkl} \leq w_{ij}x_k^h \ , \ \forall i,j \in I, i \neq j \ , \ k \in K \tag{5.17}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{l\in K} f_{ijkl} = w_{ij} \tag{5.18}$$

$$f_{ijkl} \geq 0 \ , \ \forall i,j \in I, i \neq j \ , \ k,l \in K \tag{5.19}$$

Associando conjuntos de variáveis duais λ_{ij}, υ_{ijk} e ν_{ijl} escreve-se o subproblema dual:

$$\max \left[w_{ij}\lambda_{ij} - \sum_{l \in K} w_{ij} x_l^h \nu_{ijl} - \sum_{k \in K} w_{ij} x_k^h \upsilon_{ijk} \right] \tag{5.20}$$

sujeito a:

$$\lambda_{ij} - \nu_{ijl} - \upsilon_{ijk} \leq c_{ijkl}, \ \forall k, l \in K \tag{5.21}$$

$$\lambda_{ij} \in \mathcal{R} \tag{5.22}$$

$$\upsilon_{ijk} \geq 0 \ , \ \forall k \in K \tag{5.23}$$

$$\nu_{ijl} \geq 0 \ , \ \forall l \in K \tag{5.24}$$

Do que resulta o seguinte problema mestre de Benders:

$$\min \sum_{k \in K} a_k x_k + \eta \tag{5.25}$$

sujeito a:

$$\eta \geq \sum_{i,j \in I} \left[w_{ij}\lambda_{ij}^h - \sum_{l \in K} w_{ij} \nu_{ijl}^h x_l - \sum_{k \in K} w_{ij} \upsilon_{ijk}^h x_k \right], \ \forall h \in H \tag{5.26}$$

$$\sum_{k \in K} x_k = p \tag{5.27}$$

$$x_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \tag{5.28}$$

Para determinar a solução ótima do subproblema dual, note-se que um dado produto ij pode passar por dois ou apenas um servidor (figura (5.2)).

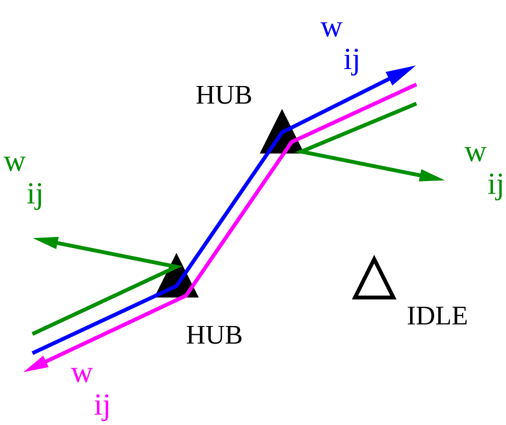

Figura 5.2: Possible routes for the commodity ij for a given $x = x^h$.

Por construção, a solução ótima seria:

$$w_{ij} \cdot \min_{(k,l)} \left\{ c_{ijkl} | y_k^h = y_l^h = 1 \right\} \tag{5.29}$$

Usando a complementaridade de folgas:

$$\lambda_{ij}^h = \min_{(k,l)} \left\{ c_{ijkl} | y_k^h = y_l^h = 1 \right\} \tag{5.30}$$

$$\upsilon_{ijk}^h = 0, \text{ if } y_k^h = 1 \tag{5.31}$$

$$\upsilon_{ijk}^h = max \left\{ 0, \ \max_l \left\{ \lambda_{ij}^h - c_{ijkl} \right\} \right\}, \text{ if } y_k^h = 0 \tag{5.32}$$

$$\nu_{ijl}^h = 0, \text{ if } y_l^h = 1 \tag{5.33}$$

$$\nu_{ijl}^h = max \left\{ 0, \ \max_k \left\{ \lambda_{ij}^h - c_{ijkl} \right\} \right\}, \text{ if } y_l^h = 0 \tag{5.34}$$

Para adaptar a decomposição para o *Uncapacitated Hub Location Problem*, deve-se apenas garantir a viabilidade no nível superior, garantindo a instalação de no mínimo um servidor.

$$\min \sum_{k \in K} a_k x_k + \eta \tag{5.35}$$

sujeito a:

$$\eta \geq \sum_{i,j \in I} \left[w_{ij} \lambda_{ij}^h - \sum_{l \in K} w_{ij} \nu_{ijl}^h x_l - \sum_{k \in K} w_{ij} \upsilon_{ijk}^h x_k \right], \ \forall h \in H \tag{5.36}$$

$$\sum_{k \in K} x_k \leq |K| \tag{5.37}$$

$$\sum_{k \in K} x_k \geq 1 \tag{5.38}$$

$$x_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K \tag{5.39}$$

5.2.1 Detalhando o Projeto da Rede Local

As formulações de sistemas Eixo-e-Raio anteriores lidam com o custo de interconexão cliente servidor de uma forma muito simples. Tal característica pode não ser interessante em situações nas quais os maiores componentes de custo estão associados à rede local.

Para melhorar o tratamento da rede local, garantindo custos de computação aceitáveis, deve-se abrir mão da otimização da atribuição cliente-servidor imposta pelos modelos Eixo-e-Raio tradicionais. A idéia central é desacoplar os níveis de desenho de rede, otimizando o acesso à rede local e o problema de localização quadrático dos servidores em duas etapas.

Tal tarefa está suportada na hipotética divisão da cidade, estado ou região em estudo, induzida por fatores, políticos, geográficos, sócio-econômicos e populacionais. Sob tal hipótese, a instalação de um servidor por região seria assegurada. Dentro de cada região haveria um conjunto de locais candidatos a hospedar o servidor, interconectado aos clientes por uma rede local e aos demais servidores por uma rede de transporte. Este servidor seria responsável por administrar toda a demanda inter-regional e também por endereçar corretamente todo o tráfego para outras regiões.

Define-se portanto $I_k \subset I$ como o conjunto de locais candidatos a receber o servidor k. Para implementar este esquema de particionamento de modo eficiente, define-se uma matriz binária P em que $p_{ki} = 1$ se o local i pode hospedar o servidor k e $p_{ki} = 0$, caso contrário.

Para tratar a otimização da rede local, considera-se o grafo $G = (V, E)$ que representa a rede potencial para uma dada região, como na figura (5.3). Cabe aqui a hipótese de que cada região é autocontida, isto é, desconsidera-se arcos que interconectem uma região a outra. Se dentro de uma dad região há $|I_k|$ candidatos a receber o servidor, o problema de projeto de rede local com custos de congestionamento (capítulo 4) seria resolvido $|I_k|$ vezes, cada uma com um local candidato $i \in I_k$ como origem de fluxo. Como visto no capítulo 4, esta tarefa não é cara, podendo ser conduzida em paralelo.

Dados todos os custos ótimos de todas as redes locais possíveis em uma dada região, define-se uma matriz de custos de instalação de servidores, $A = (a_{ki})$. Tal matriz tem tantas linhas quantos servidores há a instalar, e tantas colunas quanto a soma de todas as localidades possíveis para todos os servidores, tendo as mesmas dimensões de P. A integração dos dois níveis de projeto do sistema é assegurada através da incorporação dos custos da rede de acesso local na matriz a_{ki}.

Modificando as equações (2.20)-(2.23) e lembrando que há diversos locais candidatos para hospedar uma facilidade, mas apenas uma facilidade para cada local, reescreve-se o modelo para o QAP como:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} a_{ki} x_{ki} + \sum_{(i,j) \in E} \sum_{k \in K, l \in K, k \neq l} c_{ij} f_{ij}^{kl} \tag{5.40}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I_k} x_{ki} &= 1 \,, \quad \forall \;\; k \in K && (5.41)\\
-\sum_{j \in I, \; i \neq j} f_{ij}^{kl} &= -b_{kl} x_{ki} \,, \; \forall i \in I, \; k, l \in K \,, \; k \neq l && (5.42)\\
\sum_{i \in I, \; i \neq j} f_{ij}^{kl} &= b_{kl} x_{lj} \,, \; \forall j \in I, \; k, l \in K \,, \; k \neq l && (5.43)\\
f_{ij}^{kl} &\geq 0 \,, \; \forall i, j, k, l = 1, ..., n, i \neq j \,, k \neq l && (5.44)\\
x_{ki} &\in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, \; i \in I_k && (5.45)
\end{aligned}$$

A única hipótese extra de tal modelo é a da pré-existência uma rede de interconexão de servidores. Tal hipótese permite modificar minimamente nosso esquema de decomposição de Benders. As modificações estariam restritas ao problema mestre de Benders (equações (2.35)-(2.36)):

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{iinI_k} a_{ki} x_{ki} + \ \eta \tag{5.46}$$

sujeito a:

$$\eta \ \geq \sum_{k,l \in K, \ k \neq l} \sum_{j \in I} b_{kl} x_{lj} v_j^{kl,h} - \tag{5.47}$$

$$\sum_{k,l \in K, \ k \neq l} \sum_{i \in I} b_{kl} x_{ki} u_i^{kl,h} \ , \forall h \in H$$

$$\sum_{i \in I_k} x_{ki} \ = \ 1 \ , \quad \forall \ \ k \in K \tag{5.48}$$

$$x_{ki} \ \in \ \{0,1\} \quad \forall k \in K, \ i \in I_k \tag{5.49}$$

As variáveis duais $u_i^{kl,h}$ e $v_j^{kl,h}$ seriam avaliadas através do mesmo esquema desenvolvido no capítulo 2:

$$v_j^{kl,h} = u_i^{kl,h} + c_{ij} \ , \ \forall j \in I, \ i \neq j, \ k \neq l \tag{5.50}$$

e através de $v_j^{kl,h}$, define-se $u_i^{kl,h}$ como:

$$u_i^{kl,h} = \max_{j \in J, \ j \neq i} \ [v_j^{kl,h} - c_{ij}] \ , \ \forall i \in I \ , \ i \neq j \ , \ k \neq l \tag{5.51}$$

Este modelo é bem ajustado ao tratamento da rede de acesso local, mas ainda há apenas dois servidores entre cada par de clientes. Para observar economia de escala no projeto de tais sistemas, deve-se reescrever a formulação acima permitindo o roteamento de fluxos através de mais de dois servidores.

5.2.2 Modelo Generalizado Incluindo Transbordo entre Servidores e Desenho de Rede

O primeiro passo lógico para generalizar o modelo anterior seria habilitar o transbordo entre servidores. Este transbordo seria particularmente interessante se estiverem sendo medidos custos de congestionamento na rede de transporte entre servidores. Reescrever as restrições (5.42) e (5.43) como uma única restrição de transbordo resolve o problema, salientando que aqui não se observam soluções triviais, como no caso do modelo de Koopmans e Beckmann para o QAP, pois uma dada facilidade está restrita a se localizar em sua própria região:

$$\min \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_{ki}x_{ki} \; + \; \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in K}\sum_{l\in K}\gamma d_{ij}f_{ij}^{kl} \tag{5.52}$$

sujeito a:

$$\sum_{j\in I} f_{ji}^{kl} - \sum_{j\in I} f_{ij}^{kl} = b_{kl}x_{li}p_{li} - b_{kl}x_{ki}p_{ki} \; , \; \forall i \in I, \; k,l \in K \tag{5.53}$$

$$\sum_{i\in I_k} x_{ki} = 1 \; , \quad \forall k \in K \tag{5.54}$$

$$f_{ij}^{kl} \geq 0 \; , \; \forall i,j \in I, \; k,l \in K \tag{5.55}$$

$$x_{ki} \in \{0,1\} \; , \quad \forall k \in K, \; i \in I_k \tag{5.56}$$

A chave para esta formulação é o conjunto de restrições (5.53), que usa a matriz P para criar condições para que nós e arcos fora das regiões k e l sejam usados para transportar o produto kl. Aqui a matriz D é uma matriz de distâncias estabelecida entre todos os locais candidatos de todas as regiões e γ é custo de transporte por unidade de fluxo por unidade de distância.

Se é preciso projetar a rede de transporte, basta adicionar variáveis y_{ij} para decidir a instalação do arco ij, resultando em:

$$\min \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_{ki}x_{ki} \; + \; \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\beta d_{ij}y_{ij} + \; \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in K}\sum_{l\in K}\gamma d_{ij}f_{ij}^{kl} \tag{5.57}$$

sujeito a:

$$\sum_{j\in I} f_{ji}^{kl} - \sum_{j\in I} f_{ij}^{kl} = b_{kl}x_{li}p_{li} - b_{kl}x_{ki}pki \; , \; \forall i \in I, \; k,l \in K \tag{5.58}$$

$$\sum_{i\in I_k} x_{ki} = 1 \; , \quad \forall k \in K \tag{5.59}$$

$$f_{ij}^{kl} \leq b_{kl}y_{ij} \; , \; \forall i,j \in I, \; k,l \in K \tag{5.60}$$

$$f_{ij}^{kl} \geq 0 \; , \; \forall i,j \in I, \; k,l \in K \tag{5.61}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \; , \quad \forall i,j \in I \tag{5.62}$$

$$x_{ki} \in \{0,1\} \; , \quad \forall k \in K, \; i \in I_k \tag{5.63}$$

5.3 Experiências Computacionais

Segue um sumário das experiências realizadas com as formulações propostas. Para maiores detalhes acerca do experimento, consulte a seção correspondente do texto completo em inglês, em anexo.

5.3.1 Resultados para o *p-Hub Median Problem* e o *Uncapacitated Hub Location Problem*

As tabelas 5.1 e 5.2 apresentam os resultados obtidos para o *p-Hub Median Problem* e para o *Uncapacitated Hub Location Problem*, respectivamente.

5.3.2 O Modelo Integrado: QAP + Projeto de Rede Local com Custos de Congestionamento

A tabela 5.3 apresenta os resultados obtidos para a formulação proposta por (5.40)-(5.45).

5.3.3 Testes para o Modelo de Transbordo entre Servidores e Desenho de Rede

A tabela 5.4 apresenta os resultados obtidos com o modelo dado por (5.57)-(5.63).

5.4 Conclusões

De modo geral pode-se dizer que as formulações propostas apresentam bom comportamento, apesar de submetidas apenas a testes preliminares. Quando decompostas através de decomposição de Benders, tais formulações fornecem resultados atraentes, sobretudo do ponto de vista de tempo de computação. Recomenda-se consultar a documentação anexa para uma análise mais aprofundada destas implementações.

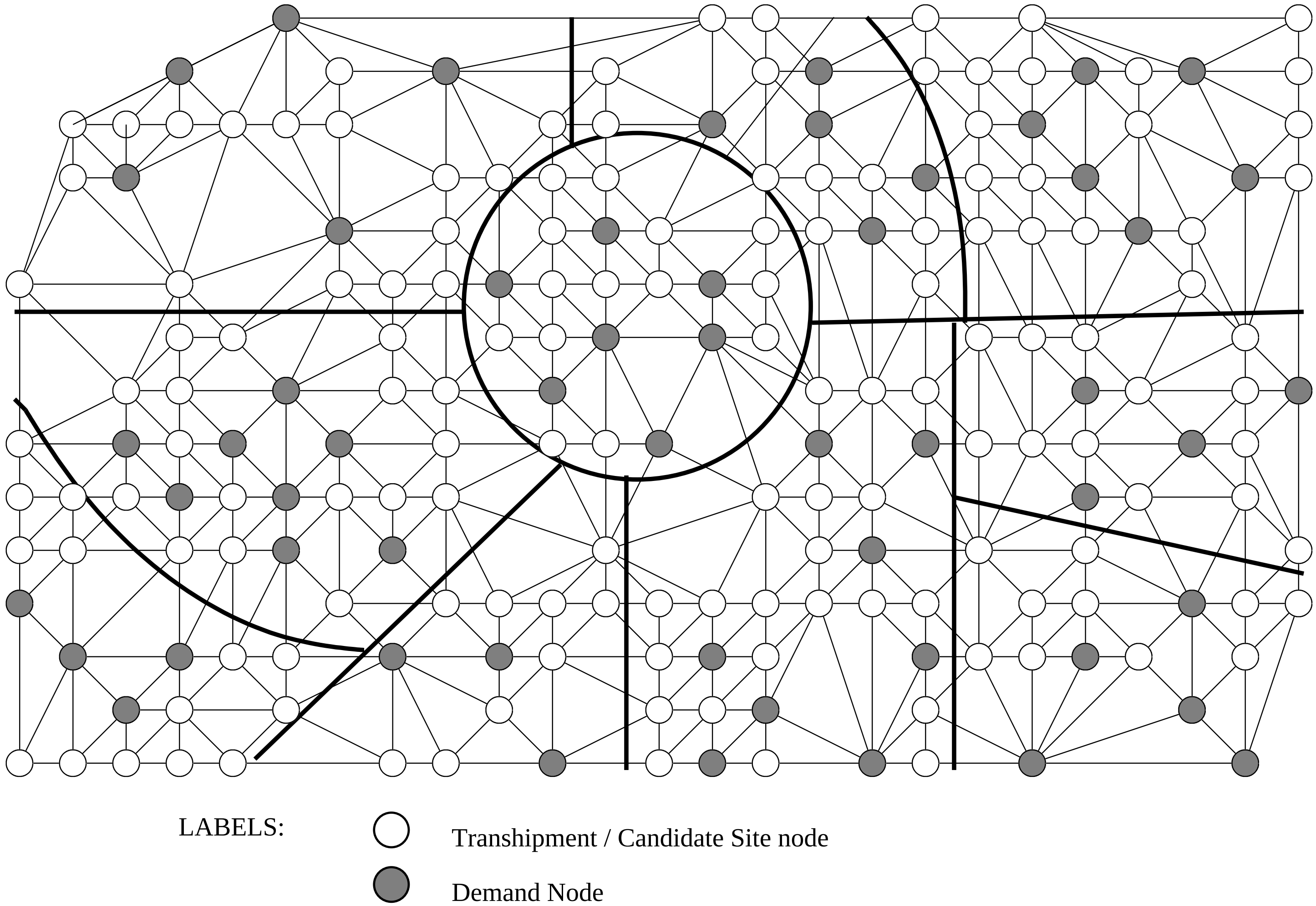

Figura 5.3: A city partitioned in regions

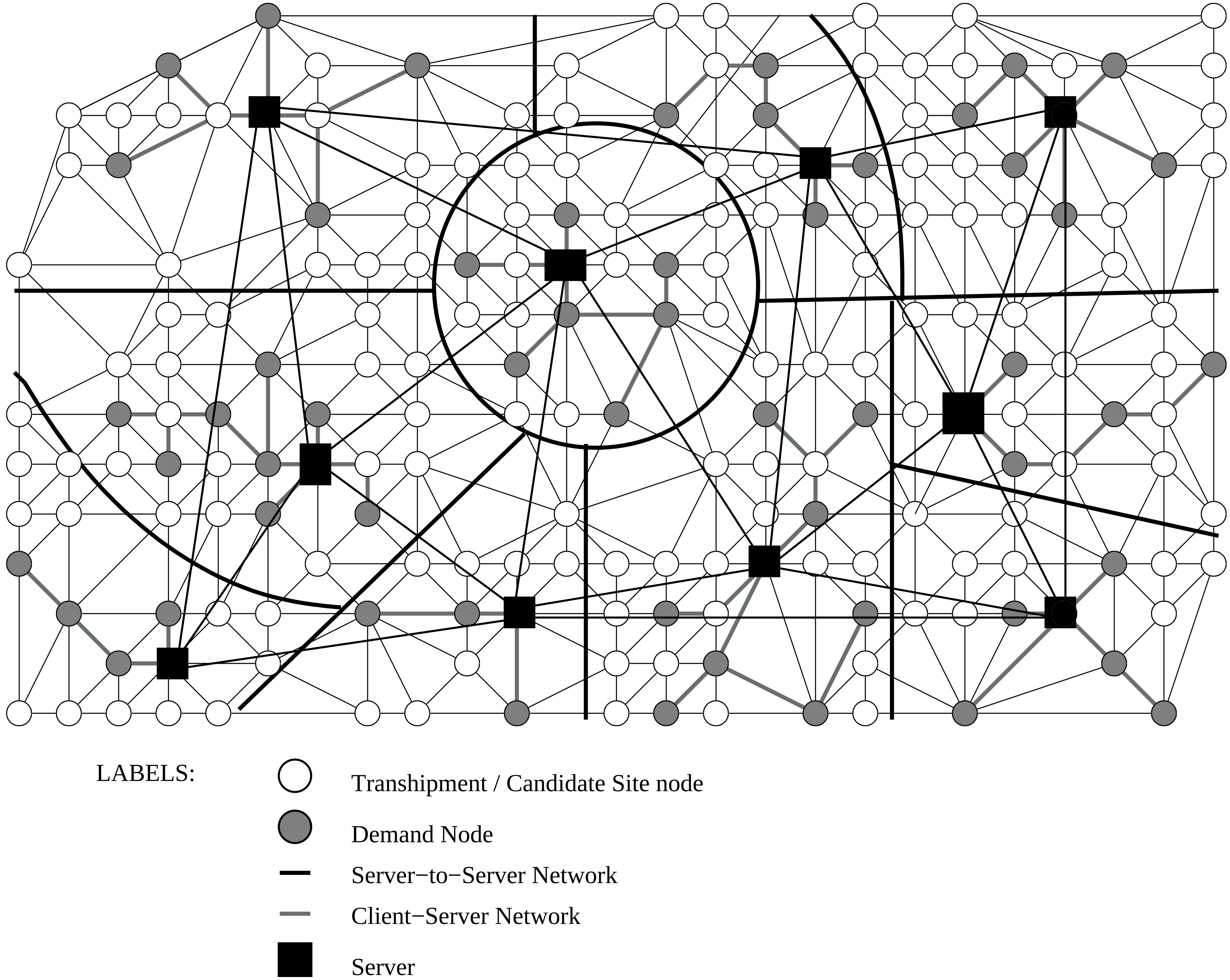

Figura 5.4: A feasible solution

Original instance	Number of clients	Number of hubs	Number of flow variables	Benders iterations	p/q cost ratio	Time[s]
nug7	7	2	2058	8	0.000	0
nug7		2		4	0.252	0
nug7		2		3	0.504	0
nug7		2		3	0.756	0
nug7		5		3	6.784	0
nug12	12	1	19008	6	0.009	0
nug12		2		6	0.102	0
nug12		2		4	0.306	0
nug12		3		26	0.000	3
nug12		3		5	0.172	0
nug12		3		4	0.343	0
nug12		3		3	0.515	0
nug12		3		3	0.859	0
nug12		4		22	0.000	2
nug12		4		3	0.317	0
nug12		4		3	0.951	0
nug12		4		3	1.585	0
nug12		6		3	5.862	1
nug15	15	3	47250	72	0.000	24
nug15		3		12	0.108	1
nug15		3		8	0.137	0
nug15		3		7	0.205	0
nug15		4		7	0.285	1
nug15		4		5	0.358	0
nug15		5		6	0.396	0
nug15		6		3	0.511	0
nug20	20	1	152000	9	0.067	1
nug20		3		8	0.123	1
nug20		4		9	0.220	0
nug20		5		13	0.088	1
nug20		5		9	0.175	1
nug20		5		8	0.263	0
nug20		5		7	0.312	1
nug20		5		7	0.312	0
nug20		6		6	0.406	1
nug20		7		3	0.544	0
nug30	30	3	783000	105	0.013	93
nug30		3		53	0.027	25
nug30		4		45	0.047	19
nug30		4		30	0.071	10
nug30		5		24	0.093	8
ste36a	36	2	1632960	54	0.034	43
sko49	49	6	5647152	133	0.053	482
sko49		6		38	0.107	75
sko64	64	6	16515072	72	3.340	408

Tabela 5.1: Benders decomposition for the p-Hub Median Problem.

Original instance	Number of clients	Number of hubs	Number of flow variables	Benders iterations	p/q cost ratio	Time [s]
had12	12	8	19008	14	0.219	1
had14	14	8	35672	5	0.089	0
had14		8		3	0.148	1
had16	16	12	61440	9	0.051	0
had16		12		7	0.062	0
had16		12		6	0.071	0
had16		12		4	0.109	0
had18	18	12	99144	7	0.056	1
had18		12		7	0.058	0
nug7	7	1	2058	5	0.165	2
nug7		2		6	0.252	0
nug12	12	2	19008	7	0.102	0
nug12		6		8	0.172	1
nug12		7		12	0.190	1
nug12		8		8	0.172	1
nug12		9		8	0.172	0
nug12		10		7	0.053	0
nug12		10		6	0.071	1
nug15	15	6	47250	8	0.216	1
nug15		7		6	0.066	0
nug15		7		6	0.070	0
nug15		10		8	0.062	1
nug15		10		6	0.079	0
nug30	30	6	783000	6	0.089	2
nug30		6		11	0.227	3
nug30		10		8	0.118	2
nug30		10		6	0.130	1
nug30		10		14	0.399	4
nug30		10		12	0.432	3
sko49	49	6	5647152	14	0.250	26
sko49		10		14	0.250	26
sko49		30		112	0.000	341
sko49		30		9	0.169	16
sko49		30		8	0.187	14
sko64	64	49	16515072	4	0.396	18
sko64		49		3	0.792	11
ste36a	36	10	1632960	15	0.437	8
ste36a		18		9	0.483	5
ste36a		18		9	0.640	4
ste36a		18		9	0.644	5

Tabela 5.2: Benders decomposition for the Uncapacitated Hub Location Problem.

Problem name	Number of servers	Possible locations	Number of flow variables	Benders iterations	p/q cost ratio	Time[s]
net624	6	24	17424	7	1.711	0
net824	8	24	32448	30	2.537	3
net1030	10	30	81300	161	1.361	137
net1030	10	30	81300	4	7.843	0
net1236	12	36	171504	7	8.061	1
net1248	12	48	304704	3	1.835	1
net1260	12	60	475920	26	1.582	6
net1260	12	60	475920	3	15.820	1
net1560	15	60	756900	70	1.668	33
net2060	20	60	1369200	14	2.490	5
net20100	20	100	3802000	114	2.423	181
net20100	20	100	3802000	15	4.847	23
net20100	20	100	3802000	3	121.166	2
net30150	30	150	19579500	54	4.685	391
net40200	40	200	62408000	85	5.316	2177

Tabela 5.3: Computational results for the integrated model.

problem name	Number of Variables		Bound Quality	Install. Cost	Network Costs (ND + OC)	Optimal Cost	Computing Time[s]
	Integer	Continuous					
net624.dat	24	20736	0.954	369	17821	18190	6
net824.dat	24	36864	0.977	3744	33207	37113	12
net824.dat			0.955	468	33369	33837	9
net1030.dat			0.959	457	55648	56105	46
net1030.dat			0.997	27609	61438	89047	36
net1030.dat	30	90000	1	218970	80183	326153	19
net1030.dat			0.941	175176	106171	379747	200
net1030.dat			0.926	175176	98798	345974	108
net1030.dat			0.992	109485	90017	252002	644
net1030.dat			0.987	109485	81485	229970	42
net1030.dat			0.96	109485	80183	216668	28
net1030.dat			0.963	31968	65460	117828	882
net1030.dat			0.914	29438	62433	105771	97
net1030.dat			0.98	27609	61503	91352	45
net1030.dat			0.912	27609	61114	89047	37
net1236.dat	36	186624	0.965	252768	165929	563697	20760
net1236.dat			0.929	242112	146485	451597	2967
net1236.dat			0.961	235088	137776	403464	109
net1236.dat			0.925	227632	130608	359054	36
net1236.dat			0.945	35994	110298	146292	265
net1236.dat			0.969	753	94189	94942	537
net1248.dat	48	331776	0.917	71392	81069	152461	70
net1545.dat	45	455625	0.993	44949	100938	145887	292

Tabela 5.4: Report for a brief experiment using the Hub Transshipment Network Design model.

Capítulo 6

Conclusões

6.1 Sumário das Contribuições da Tese

- Uma nova formulação de fluxos para o *Quadratic Assignment Problem* que tem um limite de PL razoável e fácil de resolver.
- Uma heurística com garantia de performance para o problema de localização de componentes eletrônicos incluindo efeitos térmicos.
- Um esquema de decomposição de Benders generalizada para solucionar o problema de projeto de redes com custos de expansão de capacidade e congestionamento.
- Um esquema de decomposição de Benders para formulações clássicas *Hub-And-Spoke* que soluciona grandes instâncias a baixo custo.
- Três novas formulações para solução integrada de problemas de localização e projeto de redes com custos de interdependência e congestionamento.

6.2 Conclusões

- O *Quadratic Assignment Problem* é mais fácil de resolver se é possível prescrever termos lineares.
- A heurística de performance garantida para o problema de localização de eletrônicos com efeitos térmicos se comporta bem e é capaz de projetar módulos multi-chip mais frios.
- O método de decomposição de Benders é bom para tratar programas não-lineares inteiros mistos.

- Os métodos desenvolvidos aqui podem ser usados para projetar sistemas onde se deseja otimizar localização de facilidades e projeto de redes.

Referências Bibliográficas

[1] H.P. Adams and T. Johnson. Improved linear programming bounds for the quadratic assignment problem. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 16:43–77, 1994.

[2] C.H. Aikens. Facility location models for distribution planning. *European Journal of Operations Research*, 22:263–279, 1985.

[3] Y.P. Aneja. An integer linear programming approach to Steiner problem in graphs. *Networks*, 10:167–178, 1980.

[4] K.M. Anstreicher. Eigenvalue bounds versus semidefinite relaxations for the quadratic assignment problem. *SIAM Journal of Optimization*, 11:254–265, 2001.

[5] K.M. Anstreicher and N.W. Brixius. A new bound for the quadratic assignment problem based on convex quadratic programming. *Mathematical Programming Series A*, 89:341–357, 2001.

[6] K.M. Anstreicher, N.W. Brixius, J.P. Goux, and J. Linderoth. Solving large quadratic assignment problems on computational grids. *Mathematical Programming Series B*, 91:563–588, 2001.

[7] T. Aykin. On the location of hub facilities. *Transportation Science*, 22:155–157, 1988.

[8] T. Aykin. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operations Research*, 46:409–411, 1990.

[9] T. Aykin. Lagrangian relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem. *European Journal of Operational Research*, 79:501–523, 1994.

[10] E. Balas and C. Bergthaller. Benders method revisited. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 9(1):3–12, 1983.

[11] E. Ballas and M.J. Saltzman. An algorithm for the tree-index assignment problem. *Operations Research*, 39:150–161, 1991.

[12] A. I. Barvinok. Computational complexity of orbits in representations of symmetric groups. *Adv. Soviet. Math.*, 9:161–182, 1992.

[13] M.S. Bazaraa and H.D. Sherali. Benders partitioning scheme applied to a new formulation of the quadratic assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 12:29–41, 1980.

[14] J.E. Beasley. An algorithm for solving large capacitated warehouse location problems. *European Journal of Operations Research*, 33:314–325, 1988.

[15] J.E. Beasley. An sst-based algorithm for the Steiner problem in graphs. *Networks*, 19:1–16, 1989.

[16] A. Bejan, G. Tsatsaronis, and M. Moran. *Thermal Design and Optimization*. Interscience, 1st edition, 1995.

[17] J. F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed integer variables programming problems. *Numerische Methematik*, 4:238–252, 1962.

[18] R.T. Berger, C.R. Coullard, and M.S. Daskin. Modeling and solving location routing problems with route-length constraints. *Transportation Science*, 1996.

[19] O. Berman, D.I. Ingco, and A.R. Odoni. Improving the location of minisum facilities through network modification. *The Annals of Operations Research*, 40:1–16, 1992.

[20] G. Birkhoff. Tres observaciones sobre el algebra lineal. *Rev Univ. Nac. Tucuman*, A(5):147–151, 1946.

[21] R.R. Boorstyn and H. Frank. Large-scale network topological optimization. *IEEE Transactions on Communications*, COM-25:29–47, 1977.

[22] D.S. Boyalakuntla and J.Y. Murthy. Hierarquical compact models for simulation of electronic chip packages. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 25(4):629–634, 2002.

[23] R. E. Burkard. *Discrete Location Theory: Locations with spatial interactions: the quadratic assignment problem*, volume 1. Wiley and Sons, 1 edition, 1991.

[24] R.E. Burkard. Selected topics on assignment problems. Technical Report 175, Techinshe Universität Graz, Austria, November 1999.

[25] R.E. Burkard and E. Cela. Heuristics for biquadratic assignment problem and their computational comparison. *European Journal of Operations Research*, 83:283–300, 1995.

[26] R.E.. Burkard and E. Cela. The quadratic assignment problem: theory and algorithms. *Kluwer Academic Publishers*, 1(1), 1998.

[27] R.E. Burkard and E. Cela. Linear assignment problems and extensions. *Handbook of Combinatorial optimization*, 4(1):221–300, 1999.

[28] R.E. Burkard, E. Cela, P. Pardalos, and L.S. PItsoulis. The quadratic assignment problem. *Handbook of Combinatorial optimization*, 3(1):241–339, 1998.

[29] R.E. Burkard, S. Karisch, and F. Rendl. QAPLIB - A quadratic assignment problem library. *European Journal of Operations Research*, 17:115–119, 1991.

[30] P. Burmann, A. Raman, and S.V. Garimella. Dynamics and topology optimization for piezoeletric fans. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 25(4):592–600, 2002.

[31] J. F. Campbell, G. Stiehr, A. T. Ernst, and M. Krishnamoorthy. Solving hub arc location problems on a cluster of workstations. *Parallel Computing*, 29:555–574, 2003.

[32] J.F. Campbell. Continuous and discrete demand hub location problems. *Transportation Research B*, 27B(6):473–482, 1993.

[33] J.F. Campbell. Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operations Research*, 72:387–405, 1994.

[34] J.F. Campbell. A survey of network hub location. *Studies in Locational Analysis*, 6:31–49, 1994.

[35] M. Chandy and K. M. Rusell. The design of multipoint linkages in a teleprocessing tree network. *IEEE Transactions on Communications*, COM-21:1062–1066, 1972.

[36] N. Christofides and J.E. Beasley. Extensions to a lagrangean relaxation approach for the capacitated warehouse location problem. *European Journal of Operations Research*, 12:19–28, 1983.

[37] R. Church and C. ReVelle. The maximal covering location problem. *Regional Science Association Papers*, 32:101–118, 1974.

[38] A. Claus and N. Maculan. Une nouvelle formulation du probème de Steiner sur un graphe. Technical Report 280, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Canada, 1983.

[39] K.J. Craig, D.J. Kock, and P. Gauche. Minimization of heat sink mass usinf CFD and mathematical optimization. *Journal of Electronics Manufacturing*, 121(3):143–147, 1999.

[40] G. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1962.

[41] Z. Drezner and G.O. Wesolowsky. Network design: Selection and design of links and facility location. *Transportation Research Part A*, 37:241–256, 2003.

[42] R.P.M. Ferreira and H. P. L. Luna. Discrete capacity and flow assignment algorithms with performance guarantee. *Computer Communications*, 26:1056–1069, May 2003.

[43] G. Finke, R.E.. Burkard, and F. Rendl. Quadratic assignment problems. *Annals of Discrete Mathematics*, 31:61–82, 1987.

[44] P.M. Franca and H.P.L. Luna. Solving stochastic transportation-location problems by generalized Benders decomposition. *Transportation Science*, 16:113–126, 1982.

[45] A.M. Frieze and L. Yadegar. On the quadratic assignment problem. *Discrete Applied Mathematics*, 5:89–98, 1983.

[46] B. Gavish. Topological design of centralized computer networks - formulations and algorithms. *Networks*, 12:355–377, 1982.

[47] B. Gavish. Formulations and algorithms for the capacitated minimal directed tree. *Journal of the ACM*, 30:118–132, 1983.

[48] B. Gavish. Augmented Lagrangean based algorithms for centralized network design. *IEEE Transactions on Communications*, COM-33:1247–1257, 1985.

[49] B. Gavish. Topological design of telecommunication networks - Local access design methods. *Annals of Operations Research*, 33:17–71, 1991.

[50] A. M. Geoffrion. Generalized Benders decomposition. *Journal of Optimization Theory And Applications*, 10:237–260, 1972.

[51] A.M. Geoffrion. Generalized Benders decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10(4):237–260, 1972.

[52] A.M. Geoffrion and G.W. Graves. Multicomodity distribution system design by Benders decomposition. *Management Science*, 20:822–844, 1974.

[53] M. Gerla and L. Kleinrock. On the topological design of distributed computer networks. *IEEE Transactions on Communications*, 25:48–60, 1977.

[54] M. X. Goemans and Y.-S. Mying. A catalogue of Steiner tree formulations. *Networks*, 23:19–28, 1993.

[55] M. C. Goldstein. Design of long-distance telecommunication networks - the Telepak problem. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-20:186–192, 1973.

[56] L. Gouveia. A comparison of directed formulations for the capacitated minimal spanning tree problem. *Telecommunication Systems*, 1:51–76, 1993.

[57] K.S.S. Gupta and P.K. Srimani. Core-based tree with forwarding regions (cbt-fr); a protocol for reliable multicasting in ad hoc networks. *Journal of Parallel and Distributes Computing*, 61:1249–1277, 2001.

[58] P. Hahn and T. Grant. Lower bounds for the quadratic assignment problem based upon a dual formulation. *Operations Research*, 46(6):912–922, 1998.

[59] S.L. Hakimi. Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research*, 12:450–459, 1964.

[60] D.R. Heffley. The quadratic assignment problem: A note. *Econometrica*, 40(6):1155–1163, 1972.

[61] J. Hellstrand, T. Larsson, and A. Migdalas. A characterization of the uncapacitated network design polytope. *Operations Research Letters*, 12:159–163, 1992.

[62] D.S. Hochbaum and A. Segev. Analysis of a flow problem with fixed charges. *Networks*, 19:291–312, 1989.

[63] Y.J. Huang and S.L. Fu. Thermal placement design for mcm applications. *Journal of Electronic Packaging*, 122(2):115–120, 2000.

[64] Y.J. Huang, S.L. Fu, S.L. Jen, and M.H. Guo. Fuzzy thermal modeling for mcm placement. *Microelectronics Journal*, 32(10):836–868, 2001.

[65] Y.J. Huang, M.H. Guo, and S.L. Fu. Reliability and routability consideration for mcm placement. *Microelectronics Reliability*, 42(1):83–91, 2002.

[66] F. K. Hwang and D. S. Richards. Steiner tree problems. *Networks*, 22:55–89, 1992.

[67] F. K. Hwang, D.S. Richards, and P. Winter. *The Steiner Tree Problem*. North-Holland, 1992.

[68] P. J. Juell, D. Brekke, and R. Vetter. A multicast tree constructions algorithm for large multiparty conferences. *Telecommunication Systems*, 17:299–321, 2001.

[69] M. Junger and V. Kaibel. On the SAQP polytope. *SIAM Journal of Optimization*, 11:444–463, 2000.

[70] M. Junger and V. Kaibel. Box-inequalities for quadratic assignment polytopes. *Math. program. Ser. A*, 91:175–197, 2001.

[71] D. Katanyutaveetip. Real-time optimal multicast routing. *Computer Communications*, 2002. Article in Press.

[72] L. Kaufman and F. Broeckx. An algorithm for the quadratic assignment problem using Benders decomposition. *European Journal of Operations Research*, 2:204–211, 1978.

[73] J.G. Klincewicz. Hub location in backbone/tributary network design: a review. *Location Science*, 6:307–335, 1998.

[74] T. Koch and A. Martin. Solving Steiner tree problems in graphs to optimality. *Networks*, 32:207–232, 1998.

[75] T.C. Koopmans and M. Beckmann. Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica*, 25:53–76, 1957.

[76] A.A. Kuehn and M.J. Hamburger. A heuristic program for locating warehouses. *Management Science*, 9:643–666, 1963.

[77] H. W. Kuhn. The hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2:83–98, 1955.

[78] E.L. Lawler. The quadratic assignment problem. *Management Science*, 9:586–599, 1963.

[79] S. Lorente, W. Wechsatol, and A. Bejan. Optimization of tree shaped flow distribution structures over a disc disc-shaped area. *Int. Journal of Energy Research*, 27(8):715–723, 2003.

[80] A. Losch. *The Economics of Location*. New Haven, 1 edition, 1954. Translated from German edition 1944.

[81] A. Lucena and J. E. Beasley. A branch and cut algorithm for the Steiner problem in graphs. *Networks*, 31:39–59, 1998.

[82] H. P. L. Luna and P. Mahey. Bounds for global optimization of capacity expansion and flow assignment problems. *Operations Research Letters*, 26:211–216, 2000.

[83] H.P.L. Luna, N. Ziviani, and R.M.B. Cabral. The telephonic switching centre network problem: Formalization and computational experience. *Discrete Applied Mathematics*, 18:199–210, 1987.

[84] N. Maculan. A new linear programming formulation for the shortest s-directed spanning tree problem. *Journal of Combinatorics, Information & Systems Sciences*, 11:53–56, 1986.

[85] N. Maculan. The Steiner problem in graphs. *Annals of Discrete Mathematics*, 31:185–212, 1987.

[86] N. Maculan, D. Arpin, and S. Nguyen. Le problème de Steiner sur un graphe orienté: Formulations et relaxations. *Matemática Aplicada e Computacional*, 7:109–118, 1988.

[87] T. L. Magnanti and R. T. Wong. Accelerating Benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations Research*, 29(3):464–483, 1981.

[88] T.L. Magnanti, P. Mirchandani, and R.T. Wong. Tailoring Benders decomposition for uncapacitated network design. *Mathematical Programming Study*, 26:112–154, 1986.

[89] A. Makhorin. GLPK - The GNU linear programming kit. Technical Report 1, Moskow Aviation Institute, Moscow, Russia, 2001. available in http://www.gnu.org/glpk.

[90] G.R. Mateus and H.P.L Luna. Decentralized decision-making and capacitated facility location. *The Annals of Regional Science*, 26:361–377, 1992.

[91] G.R. Mateus, H.P.L. Luna, and A.B. Sirihal. Heuristics for distribution network design in telecommunication. *Journal of Heuristics*, 6(Special Number on Telecommunications):131–148, 2000.

[92] G.R. Mateus and J.M. Thizy. Exact sequential choices of locations in a network. *Annals of Operations Research*, 86:199–219, 1999.

[93] S. Melkote and M.S. Daskin. Capacitated facility location/network design problems. *European Journal of Operations Research*, 129:481–495, 2001.

[94] S. Melkote and M.S. Daskin. An integrated model of facility location and transportation network design. *Trasportation Research Part A*, 35:515–538, 2001.

[95] E.S. Mills. The efficiency of spatial competition. *The Regional Science Association Papers*, 25:71–82, 1970.

[96] T.S. Motzkin. The assignment problem. In *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Numerical Analysis. McGraw-Hill, 1956.

[97] E.Y.K. Ng, C.P. Tso, Z.M. Wen, and K.F. Choo. Numerical simulation of flow and conjugate heat transfer in a microchannel for electronics cooling. *Journal of Electronics Manufacturing*, 9(2):141–153, 1999.

[98] M. O'Kelly. The location of interacting hub facilities. *Transportation Science*, 20:92–106, 1986.

[99] M. O'Kelly. A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32:393–404, 1986.

[100] M. O'Kelly, D. Bryan, , D. Skorin-Kapov, and J. Skorin-Kapov. Hub network design and multiple allocation: A computational study. *Location Science*, 4:125–138, 1986.

[101] M. O'Kelly and M.W. Horner. Embedding economies of scale concepts for hub network design. *Journal of Transport Geography*, 9:255–265, 2001.

[102] M. O'Kelly and H.L. Miller. The hub network design problem. *Journal of Transport Geography*, 2(1):31–40, 1994.

[103] M.W. Padberg and M.P. Rijal. *Loacation, Scheduling, Design and Integer Programming*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1 edition, 1996.

[104] P. Pardalos, F. Rendl, and H. Wolkowickz. The quadratic assignment problem: a survey of recent developments. *DIMACS Series on Discrete Mathematics and Computer Science*, 16:1–42, 1994.

[105] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1st. edition, 1980.

[106] H. Pirkul and J. Current. The hierarquical network design problem with transshipment facilities. *European Journal of Operational Research*, 52:338–347, 1991.

[107] H. Pirkul and D.A. Schiling. An efficient procedure for designing single allocation hub and spoke systems. *Management Science*, 44:235–242, 1998.

[108] N.V. Queipo, R. Devarakonda, and J.A.C. Humphrey. Genetic algorithms for thermosciences research - application to the optimized cooling of electronic components. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 37(6):893–908, 1994.

[109] N.V. Queipo and G.F. Gil. Multiobjective optimal placement of convectively cooled electronic components on printed wiring boards. *IEEE Transactions on Components Packaging and Manufacturing Technology*, 21(1):142–153, 1998.

[110] N.V. Queipo and G.F. Gil. Multiobjective optimal placement of convectively and condutively cooled electronic components on printed wiring boards. *Journal of Electronic Packaging*, 122(2):152–159, 2000.

[111] M. Queiroz and C. Humes. The projected pairwise multicommodity flow polyhedron. *Applied Mathematics Letters*, 14(4):443–448, May 2001.

[112] K.G. Ramakrishnan, M.G.C. Resende, B. Ramachandran, and J.F. Penky. *Tight QAP Bounds Via Linear Programming*. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1 edition, 2002.

[113] C.D. Randazzo and H.P.L. Luna. A comparison of optimal methods for local access uncapacitated network design. *The Annals of Operations Research*, 106:263–286, 2001.

[114] L.A.O. Rocha, S. Lorente, and A. Bejan. Constructal design for cooling a disc-shaped area by conduction. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(8):1643–1652, 2002.

[115] J.L. Rosales, A. Ortega, and J.A.C. Humphrey. A numerical simulation of the convective heat transfer in confined channel flow past square cylinders: comparison of inline and offset tandem pairs. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(3):587–603, 2001.

[116] B. Rothfarb and M. C. Goldstein. The one-terminal Telepak problem. *Operations Research*, 19:156–169, 1971.

[117] S. Sahni and T. Gonzalez. P-complete approximation problems. *Journal of Association of Computing Machinery*, 23:555–565, 1976.

[118] P.A. Samuelsom. Spatial price equilibrium and linear programming. *American Economic Review*, 42:284–303, 1952.

[119] L. Schwiebert and R. Chintalapati. Improved fault recovery for core based trees. *Computer Communications*, 23:816–824, 2000.

[120] C. Toregas, R. Swain, C. ReVelle, and L. Bergmann. The location of emergency service facilities. *Operations Research*, 19:1363–1373, 1971.

[121] P.G Tucker. Models aid the analisys of electronics cooling. *Microwaves and RF*, 40(6):95–96, 2001.

[122] J.A. Visser and Kock D.J. Optimization of heat sink mass using the DYNAMIC-Q numerical optimization. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18(10):721–727, 2002.

[123] W. Wechsatol, S. Lorente, and A. Bejan. Optimal tree-shaped networks for fluid flow in a disc disc-shaped body. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(25):4911–4924, 2002.

[124] P. Winter. Steiner problem in networks: a survey. *Networks*, 17:129–167, 1987.

[125] R.T. Wong. A dual ascent algorithm for the Steiner problem in directed graphs. *Mathematical Programming*, 28:271–287, 1984.

[126] G. Zapfel and M. wasner. Planning and optimization of hub-and-spoke transportations networks of cooperative third-party logistics providers. *International Journal of Production Economics*, 78:207–220, 2002.

[127] Z.J. Zuo, L.R. Hoover, and A.L. Phillips. Advanced thermal architeture for cooling of high power electronics. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 25(4):629–634, 2002.