

CAPÍTULO II

2. O PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Segundo Evans et al. (1987), os termos *facilities planning* (planejamento de instalações), *facilities location* (localização de instalações), *facilities design* (projeto de instalações) e *facilities layout* (arranjo físico de instalações) são empregados freqüentemente de forma indistinta, particularmente em problemas levantados em empresas manufatureiras. Para tornar possível a distinção entre os termos e suas possíveis relações, Tompkins e White (1984) propuseram uma classificação hierárquica onde o planejamento de instalações subdivide-se em:

- 1) localização de instalação significa a posição que uma instalação tem em relação ao mercado, recursos, concorrentes, fornecedores, grupo de trabalho, energia, ambiente etc;
- 2) projeto de instalações significa a forma de contribuição dos componentes da instalação com os objetivos da mesma, subdividindo-se em:
 - a) projeto estrutural tem as propriedades físicas de uma instalação, por exemplo, os materiais usados na construção, o projeto mecânico, utilidades, estética e paisagem;
 - b) projeto de arranjo físico consiste do planejamento da produção ou de áreas de trabalho, de armazenamento, de escritórios, de pessoal, de manejo de máquinas ou equipamentos etc;
 - c) projeto de sistemas manuais significando fluxos eficientes de materiais, de pessoas, de informações ou de equipamentos sobre uma instalação.

O problema de arranjo físico de instalações se caracteriza como um problema de minimização combinatorial. Tem uma função objetivo a ser minimizada que é definida sobre um conjunto discreto, cujos elementos são todas as possíveis alocações de instalações. O número de elementos do conjunto de configurações cresce fatorialmente com o aumento do número N de instalações, de modo que a busca não pode ser feita de forma exaustiva quando N é grande. Também, pelo fato de tal conjunto ser discreto, impossibilita o uso das noções de continuidade, dificultando nos processos que utilizam o conceito de direção para caminhar no sentido do ótimo (Cortes, 1996).

No caso do projeto de arranjo físico de setores dentro do prédio, o número de arranjos físicos é igual a $n!$, sendo n o número de setores a arranjar, considerando-se que a área total dos setores é igual à área da edificação. No caso do arranjo físico de máquinas dentro de um departamento, a complexidade aumenta, pois, além do espaço das máquinas, deve-se considerar o espaço para circulação, o espaço para operação e manutenção dos equipamentos e áreas

para futuras expansões. Com isto, o número de alternativas é igual a $m! \times (S/S_m)$, onde: m é o número de máquinas, S é a área do departamento e S_m é a área ocupada por todas as máquinas juntas (Marques, 1993).

Para que se possa avaliar a complexidade do problema, o número de soluções num problema de arranjo físico de um setor com 15 departamentos seria de $15!$, o que nos fornece 1 307 674 368 000 possíveis soluções a serem testadas. Tais problemas, denominados de NP-completos, (Reingold et al, 1977; Gondran e Minoux, 1984) apresentam uma complexidade de resolução, por consumirem excessivo espaço de memória e elevado tempo de processamento.

Um problema é dito polinomial se existe um algoritmo denominado tempo-polinomial, cujo tempo de solução, estimado pelo número de operações elementares de bits (tais como, *or*, *and*, *not*, *print* etc) sobre uma string de entrada de tamanho I , é limitado superiormente por uma polinomial $P(I)$ (Reingold et al., 1977).

Um algoritmo é dito determinístico, se ele explora uma alternativa do problema por vez, e retorna posteriormente para explorar as demais alternativas. Um algoritmo é denominado não-determinístico se ele explora todas as alternativas de um problema simultaneamente criando cópias de si em cada alternativa. Todas as cópias agem independentemente podendo criar novas cópias. Se uma cópia encontrar uma escolha improdutiva ela pára, se encontrar uma solução, comunica seu sucesso às demais cópias que param a execução (Reingold et al, 1977).

A classe de problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial por um algoritmo não-determinístico é denominada de classe NP (Gondran e Minoux, 1984).

Um problema P_1 pode ser transformado num problema P_2 , se em qualquer instância de P_1 pode ser transformada em tempo polinomial numa instância de P_2 , tal que a solução de P_1 pode ser obtida em tempo polinomial a partir da solução da instância de P_2 .

Figura 2.1 Diagrama da transformação do problema P_1 em P_2 .

Um problema é NP-hard se todo problema em NP é transformado nele, e um problema é NP-completo se ele está em ambas classes NP-hard e em NP (Reingold et al, 1977).

Segundo Kusiak e Heragu (1987) o problema de arranjo físico de instalações tem sido modelado como: problema quadrático de atribuição, problema quadrático de cobertura de conjunto, problema de programação linear inteira, problema de programação mista, um problema da teoria dos grafos.

2.2 CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

2.2.1 Introdução

O problema de arranjo físico envolve o arranjo físico de um número dado de instalações tais como, departamentos ou máquinas, onde o custo total para movimentar o material necessário entre instalações é minimizado (Heragu e Kusiaki, 1991).

O problema tem sido examinado por mais de duas décadas. É estimado que entre 20 e 50% do total de operações utilizadas em manufaturas são atribuídas ao manuseio de material que está diretamente relacionado ao arranjo físico de instalações (Savsar, 1991).

Dois objetivos têm sido considerados para otimizar os arranjos físicos de instalações. Um deles é quantitativo o outro qualitativo. Na prática, esses objetivos são usados, um de cada vez, na avaliação do arranjo físico. Por exemplo, um objetivo quantitativo é o de minimizar o manuseio de material, e um objetivo qualitativo é o de minimizar algumas medidas de avaliação da proximidade dos departamentos (Savsar, 1991).

2.2.2 Tipos de problemas

Os tipos de problemas de projetos de instalações encontrados na literatura são:

- problema de arranjo físico de instalações, e
- problema de arranjo físico de máquinas.

Para o problema de arranjo físico de máquinas, três são os padrões (fig. 2.2) apresentados por Hassan (1994):

- problemas de arranjo físico de máquinas em linhas simples;
- problemas de arranjo físico de máquinas em linhas múltiplas;
- problemas de arranjo físico de máquinas em *loop*.

Figura 2.2: Tipos de arranjo físico de máquinas

2.2.3 Diferença entre os problemas:

Segundo Hassan (1994), existem diferenças entre os problemas de arranjo físico de instalações (ou blocos) e de máquinas e algumas destas diferenças são apresentadas a seguir:

- 1) nos modelos de arranjo físico de máquinas, as dimensões e áreas das máquinas são relativamente pequenas e podem ser consideradas iguais ou ignoradas no procedimento de solução sem perda de precisão. Desta forma, na maioria dos procedimentos de arranjo físico de máquinas, apresentados na literatura, as máquinas são representadas esquematicamente por um

ponto. As posições ou as possíveis localizações das máquinas no arranjo físico podem ser consideradas equidistantes. Como consequência desta representação e da estrutura geométrica do arranjo físico, a distância entre as posições no arranjo esquemático é calculada facilmente. Por exemplo, a distância d_{ij} entre as posições i e j é calculada por (Afentakis et al., 1990):

$$d_{ij} = \begin{cases} j-i & \text{se } j > i \\ n+j-i & \text{se } j < i \end{cases} \text{ onde } n \text{ é o número da posição (ou da máquina).}$$

Por outro lado, a área e as dimensões dos departamentos no problema de arranjo físico de instalações, apresentam variações o que torna impossível a suposição de áreas iguais e impede a representação esquemática do arranjo físico de instalações. Assim, os departamentos são representados como superfícies regulares com diferentes áreas no arranjo físico de instalação e as distâncias entre elas devem ser calculadas. Essas distâncias variam com a forma e as áreas dos departamentos (Hassan et al., 1986);

2) o arranjo físico de máquina leva em consideração a estrutura geométrica enquanto o arranjo físico de instalações não (Hassan, 1994);

3) a relação entre máquinas usadas nos problemas de arranjo físico de máquinas geralmente são relações quantitativas. Elas representam, tempo de trabalho, custos e volume de peças movimentadas entre máquinas. Essas relações são representadas por uma matriz de fluxos que não é necessariamente simétrica, e os valores abaixo e acima da diagonal representam movimentos em direções opostas. Uma lista de peças com a seqüência de máquinas necessárias para a sua fabricação é algumas vezes utilizada. Este tipo de dado de entrada pode ajudar a reduzir o retorno e aumentar o movimento da seqüência. As relações quantitativas entre instalações são representadas por um gráfico, que é utilizado algumas vezes em problemas de arranjo físico de instalações, e podem não ser particularmente convenientes para arranjo físico de máquinas, e não têm sido usadas exceto por Abdou e Dutta (Hassan, 1994);

4) Vários fatores que são ignorados no problema do arranjo físico de bloco devem ser considerados no arranjo físico de máquinas visto que ele é um problema de arranjo físico detalhado, e esses fatores apresentam impacto na operação da instalação manufatureira. Alguns desses fatores são: utilização de máquinas, tempo e comprimento de fila, retorno e saltos, grau de automação, habilidade do operador em operar mais de uma máquina, número e capacidade de troca de ferramenta (*tool magazine*), adaptabilidade de equipamentos para manuseio de materiais, controle de ferramentas (*tooling policy*), número e localização das estações de carga e descarga, taxa de produção. Deve-se ressaltar, entretanto, que levar em consideração todos esses fatores simultaneamente, complica o desenvolvimento do arranjo físico analiticamente. Muitos desses fatores não foram ainda considerados nos modelos de arranjo físico de máquinas, simultaneamente ou individualmente (Hassan, 1994).

5) pelos fatores citados anteriormente, preparar os dados necessários para desenvolver um arranjo físico de máquinas (Hassan e Albin, 1994) requer uma análise mais elaborada que a necessária para o problema de arranjo físico de instalações (ou blocos). Por exemplo, o tempo de movimentação é uma função das distâncias e das características do sistema de manejo do material, tarefa desempenhada em movimento tal como carga e descarga, a direção do movimento, a quantidade e a localização das estações de carga e descarga, que devem ser considerados no problema. Um segundo exemplo, mostra a necessidade de considerar a razão de produção de um FMS (*Flexible Manufacturing Systems*), na função objetivo de um modelo de arranjo físico de máquinas (Co et al., 1989). Estes autores analisaram os valores médios de desempenho nas redes de filas afim de calcular as razões de produção (Hassan, 1994).

2.2.4 Relação entre o problema de arranjo físico de instalações e o processo de produção

Planejar o arranjo físico de uma certa instalação significa tomar decisões sobre a forma como serão dispostos, nessa instalação, os centros de trabalho que aí devem permanecer. Conceitua-se centro de trabalho, qualquer coisa que ocupe espaço: um departamento, uma sala, uma pessoa ou grupo de pessoas, máquinas, equipamentos, bancadas e estações de trabalho, etc. Em todo o planejamento de arranjo físico, irá existir sempre uma preocupação básica: tornar mais fácil e suave o movimento do trabalho através do sistema, quer esse movimento se refira ao fluxo de pessoas ou de materiais (Moreira, 1993).

Moreira cita três motivos que tornam importantes as decisões sobre arranjo físico:

- Elas afetam a capacidade da instalação e a produtividade das operações;
- Mudanças no arranjo físico podem implicar no dispêndio de consideráveis somas de dinheiro, dependendo da área afetada e das alterações físicas necessárias nas instalações, entre outros fatores;
- As mudanças podem representar elevados custos e/ou dificuldades técnicas para futuras reversões; podem ainda causar interrupções indesejáveis no trabalho.

Por esses motivos, poderia se pensar que um arranjo físico, uma vez estabelecido não deve ser mudado, e só deve ser aplicado para projetar novas instalações. Isso não é verdade, entretanto, pois diversos fatores tais como: a ineficiência de operações, taxas altas de acidentes, mudanças no produto ou serviço, necessidade de expor convenientemente produtos ou serviços ao cliente, mudanças no volume de produção ou fluxo de clientes, podem conduzir a alguma mudança em instalações já existentes.

Costuma-se agrupar os arranjos físicos possíveis em três grandes grupos, a partir dos quais podem existir tipos híbridos. Cada um desses tipos puros tem suas próprias características e conseqüências no que diz respeito aos custos de equipamentos envolvidos, manuseio de materiais ou movimentação de clientes, estoques de material em processo, etc. De certa forma, as características desses arranjos físicos são as dos sistemas de produção que lhes correspondem. Os tipos

de arranjos físicos são:

- Arranjo físico por produto: corresponde ao sistema de produção contínua tais como as linhas de montagem e as indústrias de processo.
- Arranjo físico por processo: corresponde ao sistema de produção de fluxo intermitente como a produção por lotes ou por encomendas.
- Arranjo físico de posição fixa: corresponde ao sistema de produção de projetos.

O modelo apresentado será utilizado para resolver problemas de arranjo físico por processo.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA PARA PROBLEMAS DE ARRANJO FÍSICO

2.3.1 Introdução

Segundo Kusiak e Heragu (1987) os problemas de arranjo físico de instalação tem sido modelado como:

- a) problema quadrático de atribuição;b) problema quadrático de cobertura de conjunto;c) problema de programação linear inteira;
- d) problema de programação mista;
- e) problema da teoria dos grafos.

A seguir tais problemas serão apresentados em detalhes.

2.3.2 Modelo quadrático de atribuição

Os primeiros pesquisadores a modelarem um problema para alocar instalação considerando o fluxo de materiais foram Koopmans e Beckman (1957). O modelo utilizado foi de um problema quadrático de atribuição. O nome se deve ao fato de que a função objetivo é uma função do segundo grau enquanto que as restrições são funções lineares semelhante ao problema de atribuição linear. A notação usada para o problema é a que segue:

n - número total de instalações ou posições;

a_{ij} - retorno líquido da operação da instalação i na posição j ;

f_{ik} - fluxo de material da instalação i para a instalação k ;

c_{ij} - custo por unidade de transporte de material da posição i para a posição j ;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a facilidade } i \text{ está na posição } j, \\ 0 & \text{para os outros casos.} \end{cases}$$

Os autores consideraram que:

- a. a_{ij} é o retorno bruto menos o custo inicial, e não inclui o custo de transporte de materiais entre instalações;
- b. f_{ik} independe da posição da instalação;
- c. c_{jl} independe da instalação e está associado a alternativa mais barata de transporte de material da instalação i para a instalação j , não passando por uma terceira posição.

O problema (PQA)

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ik} c_{jl} x_{ij} x_{kl} \quad (2.1a)$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1b)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1c)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.1d)$$

Contudo, se a_{ij} for considerado o custo de locação e operação da instalação i na posição j em vez de retorno líquido de operação da instalação i na posição j , então (2.1a) pode ser reescrita como:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ik} c_{jl} x_{ij} x_{kl} \quad (2.2)$$

As equações (2.2), e de (2.1b) até (2.1d) podem ser usadas como modelo do problema de arranjo físico de instalações, onde a_{ij} , f_{ik} e c_{jl} representam:

a_{ij} - o custo fixo para alocar a instalação i na posição j ;

f_{ik} - o fluxo de material entre as instalação i e k ;

c_{jl} - custo unitário do fluxo de material entre as posições j e l ;

(Lawler, 1963) introduz b_{ijkl} , onde:

$$b_{ijkl} = \begin{cases} f_{ik} c_{jl} + a_{ij} & \text{se } i = k \text{ e } j = l; \\ f_{ik} c_{jl} & \text{se } i \neq k \text{ ou } j \neq l. \end{cases}$$

e redefinindo a função objetivo (2.2) para:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} x_{ij} x_{kl} \quad (2.3)$$

Pelas restrições (2.1b) e (2.1c) na formulação acima, $i = k$ se e somente se $j = l$, e $i = k$ se e somente se $j = l$. Observe que na formulação acima, o número de instalações não é necessariamente igual ao número de locais. Entretanto, para alguns problemas, o número de instalações m pode ser menor que o número n de locais, isto é, $m < n$. Tal problema também pode ser formulado como um problema quadrático de atribuição desde que se introduzam instalações artificiais $1, 2, \dots, n-m$ e se considere o fluxo entre essas instalações artificiais e as demais igual a zero.

Para o caso dos a_{ij} serem iguais ou iguais a zero, a função objetivo (2.2) reduz-se para:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ik} c_{jl} x_{ij} x_{kl} \quad (2.4)$$

Do problema quadrático de atribuição (2.2) e (2.1b) a (2.1d), dois casos especiais podem ser deduzidos:

a) problema linear de atribuição : quando os f_{ik} são iguais entre si, a função objetivo reduz-se a:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \quad (2.5)$$

A equação (2.5) e de (2.1b) a (2.1d) representam um problema linear de atribuição.

a) problema do caixeiro viajante: se os x_{ij} forem representados em forma matricial, a matriz resultante $X = [x_{ij}]$ pode ser uma matriz de permutação, isto é, uma matriz em que cada linha e cada coluna tem pelo menos um valor diferente de zero e igual a um. A função objetivo (2.5) mais as restrições (2.1b) a (2.1d), e a condição de que a matriz permutação é cíclica (figura 2.3), fornece o modelo do problema do caixeiro viajante.

$$X = [x_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 2.3 Exemplo de matriz de permutação cíclica
O problema quadrático de atribuição (2.2), (2.1b) à (2.1d) tem sido usado

freqüentemente para modelar o problema de arranjo físico de instalações. Entretanto, isto não significa que todo problema de arranjo físico de instalação deva ser formulado como um problema quadrático de atribuição, como no caso do problema de arranjo físico de máquinas onde a localização das máquinas não é conhecida a priori. Tais problemas não podem ser formulados como problemas quadráticos de atribuição, pois as distâncias não podem ser determinadas. A distância d_{ij} entre as locações j e i dependem da seqüência do arranjo de todas as outras máquinas.

Esta situação não se encontra em problemas de arranjo físico em que as instalações são todas de mesmo tamanho, pois a localização são todos de mesma área e as distâncias d_{jl} entre as localizações j e l independem da instalação atribuída naquele local. Entretanto, d_{jl} não muda de uma instalação alocada para outra. Problemas em que a distância entre localizações dependem da instalação alocada serão referenciados como um problema geral de arranjo físico.

Existem duas formulações para o problema geral de arranjo físico de instalações. O primeiro é:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^n f_{ik} c_{jl}^k x_{ij} x_{kl} \quad (2.6)$$

sujeita as restrições de equações (2.1b) a (2.1d), onde c_{jl}^k é o custo de transporte de uma unidade de material da posição j para a posição l sobre o arranjo k . Observe que k varia sobre o conjunto de todos os possíveis arranjos do arranjo físico como ressaltado por Armour e Buffa (1963), esse número depende das áreas das instalações e não precisa ser necessariamente $n!$. De fato em muitos casos práticos o número de arranjos viáveis do arranjo físico pode ser bem menor que $n!$. Isto pois, dois ou mais arranjos físicos podem ser simétricos e somente um deles precisa ser avaliado.

Do ponto de vista teórico o modelo apresentado expressa o que se deseja obter, mas na prática é de difícil solução, uma vez que os custos dependem do arranjo e vice-versa.

2.3.3 Modelo quadrático de recobrimento de conjunto

A segunda formulação para o problema geral de arranjo físico de instalações é o modelo quadrático de recobrimento de conjunto (Bazaraa, 1975). Nesta formulação, a área total ocupada por todas as instalações é dividida em um número de blocos (reticulado).

A notação usada é:

q - número de blocos onde a área total ocupada por todas as instalações é dividida;

$I(i)$ - número de locais possíveis para a instalação i ;

$J_i(j)$ - conjunto de blocos ocupados pela instalação i alocada na posição j ;

$d(j_i, l_k)$ - distância entre centróides da posição j e l quando a instalação i é alocada na posição j e a instalação k é alocada na posição l ;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a facilidade } i \text{ é alocada na posição } j; \\ 0 & \text{para os outros casos;} \end{cases}$$

$$p_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{se o bloco } t \in J_i(j); \\ 0 & \text{para os outros casos.} \end{cases}$$

O problema quadrático de cobertura de conjuntos (PQC) é :

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{I(i)} a_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{I(i)} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{I(k)} f_{ik} d(j_i, l_k) x_{ij} x_{kl} \quad (2.7a)$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^{I(i)} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7b)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{I(i)} p_{ijt} x_{ij} = 1 \quad t = 1, 2, \dots, q \quad (2.7c)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, I(i) \quad (2.7d)$$

Observe que as restrições (2.7b) garantem que toda instalação seja atribuída para exatamente um local e as restrições (2.7c) garantem que cada bloco seja ocupado por, no máximo, uma instalação.

As distâncias entre localizações são tomadas entre os centróides das mesmas. Bazaraa (1975) sugere uma alternativa de medir essas distâncias utilizando os fluxos entre as instalações:

$f'_{ik} = f_{ik} / S_i S_k$, onde S_i é o número de blocos ocupados pela instalação i , e d'_{jl} é a distância entre os blocos j e l . Usando esta medida obtém-se a seguinte generalização:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^q f_{ik} d'_{jl} x_{ij} x_{kl} / S_i S_k \quad (2.8a)$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^q$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8b)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (2.8c)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (2.8d)$$

Embora a formulação acima possa ser usada para representar o problema geral de arranjo físico de instalações, uma desvantagem é que aumenta o tamanho do problema quando a área total ocupada por todas as instalações é dividida em pequenos blocos (Bazaraa, 1975). O mesmo pode ser dito em relação à sugestão de Hillier e Connors (1966) para o problema geral de arranjo físico de instalações, onde as instalações devem ser particionadas em sub-instalações disjuntas de mesma área.

2.3.4 Modelos de programação linear inteira

Além dos modelos de PQA e PQC, existem outros que também utilizam a modelagem de programação inteira para o problema de arranjo físico de instalações. Lawler (1963) foi o primeiro a formular, definindo a variável:

$$y_{ijkl} = x_{ij} x_{kl}, \quad (2.9)$$

e substituindo no problema quadrático de atribuição (PQA) (2.2) e (2.1b) a (2.1d) transformando-o num problema de programação linear inteira (PPLI):

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} y_{ijkl} \quad (2.10a)$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n y_{ijkl} = n^2 \quad (2.10b)$$

$$x_{ij} + x_{kl} - 2 y_{ijkl} = 0 \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n \quad (2.10c)$$

$$y_{ijkl} \in \{0, 1\} \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n \quad (2.10d)$$

e as restrições de equações (2.1b) a (2.1d).

O PQA tem n^2 variáveis x_{ij} e $2n$ restrições enquanto o PPLI tem n^2 variáveis x_{ij} , n^4 variáveis y_{ijkl} e $n^4 + 2n + 1$ restrições. Nesta e nas comparações seguintes, as restrições de não negatividade foram excluídas. Um ponto negativo no modelo de Lawler segundo Kaku e Thompson (1986) é ter $2n^4 + 2n$ restrições.

2.3.5 Problemas de programação mista

Outro modelo proposto para solução do PQA por programação inteira é o de Love e Wong (1976) que tem uma formulação mais simples onde:

- a) os locais são definidos como pontos num plano cartesiano;
- b) os custos de transporte são proporcionais às distâncias, considerando distâncias retangulares.

Se :

$$h_{ik}^r = \begin{cases} \text{distância horizontal entre facilidade } i \text{ e } k \text{ se a facilidade } i \text{ está à direita de } k, \\ 0 \text{ outros casos;} \end{cases}$$

$$h_{ik}^l = \begin{cases} \text{distância horizontal entre facilidade } i \text{ e } k \text{ se a facilidade } i \text{ está à esquerda de } k, \\ 0 \text{ outros casos;} \end{cases}$$

$$v_{ik}^a = \begin{cases} \text{distância vertical entre facilidade } i \text{ e } k \text{ se a facilidade } i \text{ está acima de } k, \\ 0 \text{ outros casos;} \end{cases}$$

$$v_{ik}^b = \begin{cases} \text{distância vertical entre facilidade } i \text{ e } k \text{ se a facilidade } i \text{ está abaixo de } k, \\ 0 \text{ outros casos;} \end{cases}$$

(x_i, y_i) é a localização da instalação i ;

(X_j, Y_j) é a localização da posição j ;

a formulação do problema de programação inteira para o PQA é:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n f_{ik} (h_{ik}^r + h_{ik}^l + v_{ik}^a + v_{ik}^b) \quad (2.11a)$$

$$\text{s.a } h_{ik}^r - h_{ik}^l = x_i - x_k \quad i = 1, 2, \dots, n, k = i + 1; \quad (2.11b)$$

$$v_{ik}^a - v_{ik}^b = y_i - y_k \quad i = 1, 2, \dots, n, k = i + 1; \quad (2.11c)$$

$$x_i + y_i = \sum_{j=1}^n (X_j + Y_j) x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11d)$$

$$x_i - y_i = \sum_{j=1}^n (X_j - Y_j) x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11e)$$

$$h_{ik}^r, h_{ik}^l, v_{ik}^a, v_{ik}^b \quad 0 \leq i = 1, 2, \dots, n, k = i + 1; \quad (2.11f)$$

$$x_i, y_i \quad 0 \leq i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11g)$$

e as restrições de equações (2.1b) a (2.1d).

Na formulação acima, a localização das instalações é definida por coordenadas cartesianas ou retangulares. As restrições (2.11d) e (2.11e) definem somente a localização das instalações. O problema tem n^2 variáveis inteiras e $n^2 + 3n$ restrições. Experiências computacionais indicam que esta formulação não é conveniente para problemas com nove ou mais instalações em função do aumento do número de variáveis e do número de restrições.

Kaufman e Broeckx (1978) formularam um problema de programação mista com um número reduzido de variáveis e restrições em relação aos formulados com programação inteira para o PQA. A equivalência entre os problemas foi provada por Kaufman e Broeckx (1978) e Burkard (1984). Para o novo modelo foi definido:

$$w_{ij} = x_{ij} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} x_{kl} \quad (2.12a)$$

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} \quad (2.12b)$$

A função objetivo é:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} x_{ij} x_{kl} = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} x_{kl} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} \quad (2.13a) \end{aligned}$$

$$s. a \ e_{ij} x_{ij} + \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijkl} x_{kl} \right) - w_{ij} = e_{ij} \quad (2.13b)$$

$$w_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.13c)$$

e as restrições de equações (2.1b) a (2.1d).

A formulação envolve n^2 variáveis binárias e n^2 variáveis reais e $n^2 + 2n$ restrições.

Outro modelo é o proposto por Bazaraa e Sherali (1980), definido da seguinte forma:

$$g_{ijkl} = [a_{ij} + a_{kl} / (m - 1)] + f_{ik} d_{jl} + f_{ki} d_{lj} \quad (2.14a)$$

$$y_{ijkl} = x_{ij} x_{kl} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n; k = i+1, \dots, n; l = 1, \dots, n \quad l \neq j. \quad (2.14b)$$

O problema linear inteiro misto equivalente ao PQA é:

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=1}^n g_{ijkl} y_{ijkl} \quad (2.15a)$$

$$s.a \sum_{k=i+1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n y_{ijkl} - (n - i) x_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, n \quad (2.15b)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n y_{ijkl} - (k - 1) x_{kl} = 0 \quad k = 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, n \quad (2.15c)$$

$$y_{ijkl} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n-1, k = i+1, \dots, n, j, l = 1, 2, \dots, n, j \neq l \quad (2.15d)$$

$$y_{ijkl} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1, k = i+1, \dots, n, j, l = 1, \dots, n, j = l \quad (2.15e)$$

e as restrições de equações (2.1b) a (2.1d). O problema tem n^2 variáveis inteiras, $n^2 (n-1)^2 / 2$ variáveis reais e $2n^2$ restrições.

2.3.6 Modelos que utilizam a teoria dos grafos

A formulação que utiliza a teoria dos grafos necessita conhecer os locais para cada par de instalações adjacentes (Foulds e Robinson, 1976).

A seguinte notação é usada:

$G = (V, E)$ - é um grafo onde V é o conjunto de vértices não vazio, E é o conjunto de ligações disjuntas de V ;

w_{ij} - indica a razão de proximidade desejável para alocar a instalação i adjacente à instalação j ;

V - o conjunto de instalações;

N - o conjunto de pares de instalações que devem ser adjacentes em alguma solução viável;

F - o conjunto de pares de instalações que não devem ser adjacentes em alguma solução viável;

$$E' = \{ (i, j) \mid x_{ij} = 1, (i, j) \in E \};$$

A formulação do problema utilizando a teoria dos grafos é:

$$\max \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} w_{ij} x_{ij} \quad (2.16a)$$

$$\text{s. a } x_{ij} = 1, (i, j) \in N \quad (2.16b)$$

$$x_{ij} = 0, (i, j) \in F \quad (2.16c)$$

$$(V, E' \cup N) \text{ é um grafo planar. } (2.16d)$$

Segundo Evans et al.(1987) os problemas de projeto de arranjo físico podem ser separados em duas categorias básicas. A primeira usa modelos quadráticos de atribuição como formulação básica e a segunda categoria é caracterizada pelo uso do gráfico de relacionamento no projeto do processo.

2.3.7. Modelo de arranjo físico de instalações proposto por Tam e Li

2.3.7.1 Definição do problema

Os procedimentos usados para resolver os problemas de arranjo físico, segundo Tam (1992b), têm sido criticados pelo fato da busca ser conduzida a partir de um único ponto no espaço de soluções e pela dificuldade que apresenta a definição das restrições geométricas. Em outras palavras, a dificuldade de resolver o problema de arranjo físico se origina do fato de que a localização de cada instalação depende da localização de outras. A complexidade aumenta ainda mais, quando se impõem restrições de forma e de tamanho.

Segundo (Tam e Li, 1991) as instalações são usualmente modeladas como um bloco com certa forma. As três formas mais comuns são: retangular, quadrada e

circular.

Dentre as formas acima, a mais comum é a retangular, da qual a quadrada é um caso particular. A forma circular, apesar de poder ser representada facilmente através das coordenadas do centro e do raio, e ser citada por alguns autores como sendo de mais fácil manuseio computacional, não representa a realidade.

2.3.7.2 Características geométricas

Existem algumas importantes características geométricas associadas com as instalações. A maioria das características apresentadas abaixo são relativas aos blocos retangulares (Tam e Li, 1991).

- a) Tamanho: é a área de uma instalação.
- b) Razão de forma (aspect ratio): a razão de forma é dada pela relação:

$$a_i = \text{altura da instalação } i / \text{largura da instalação } i \quad (2.17)$$

- a) Orientação: em geral, somente orientações horizontal e vertical são aceitas para os blocos retangulares. Se a instalação pode ser colocada horizontalmente ou verticalmente, ela tem orientação livre, caso contrário, é denominada orientação fixa.
- b) Razão de sobreposição (deadspace ratio): é uma medida que reflete o grau de distorção da forma. A existência de áreas ocupadas no interior de uma instalação modificará a forma da área sobreposta. A medida da razão de sobreposição de áreas tem este propósito, e é definida como:

$$r_i = \text{área de sobreposição na instalação } i / \text{área da instalação } i \quad (2.18)$$

Observação: A variação da instalação, segundo a orientação, é dita fixa quando puder ser colocada de uma única forma, caso contrário é dita móvel.

2.3.7.3 Restrições do modelo

De acordo com as características geométricas de cada bloco, as restrições consideradas no problema são:

- a) restrições de tamanho;
- b) restrições de orientação;
- c) restrições de forma;
- d) restrições de sobreposição.

Para restringir a forma de uma instalação sua razão de forma deve estar contida no intervalo $[a_{\min}^i, a_{\max}^i]$, onde estes valores representam os limites inferior e superior da razão de forma da instalação i . Para as instalações que têm orientação livre (Tam, 1992 b), considera-se como razão de forma os valores a_i e $1/a_i$. Assim, Tam propõe considerar como intervalo:

$$[\min \{ a_{\min}^i, 1 / a_{\max}^i \}, \max \{ a_{\max}^i, 1 / a_{\min}^i \}] \quad (2.19)$$

Quando a planta é livre de áreas ocupadas, as razões de sobreposição de todas as instalações são iguais a zero. Uma das utilidades desta medida, é que se pode moldar o perímetro de uma planta aproximando o mesmo a uma forma desejada (Tam, 1992 b).

Baseando-se nesta formulação, dada uma árvore de corte (*slicing tree*), pode-se calcular: os limites, as razões de forma e as razões de sobreposição para todas as instalações. De fato, todos podem ser calculados uma vez que os pontos de corte da árvore sejam conhecidos (Tam, 1992 b).

2.3.7.4 Modelagem do problema

O objetivo é alocar espaços para as instalações, de tal forma que a maioria das instalações com grande fluxo de tráfego fiquem próximas e satisfaçam às restrições de área e de forma de cada uma. O problema de localização de espaços é definido como: encontrar uma árvore de corte s S , tal que:

$$\min_s S F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij} d_{ij} \quad (2.20a)$$

$$s. a \ a_{\min}^i \leq a_i \leq a_{\max}^i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.20b)$$

$$0 \leq i_{\max}^i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.20c)$$

onde:

- v_{ij} - é o volume de tráfego entre instalações i e j ;
- d_{ij} - é a distância retilínea entre os centróides da instalação i e j ;
- a_i - é a razão de forma da instalação i ;
- $i_{\max}^i$ - é a razão de sobreposição da instalação i ;

O problema pode ser formulado como um problema de otimização não restrito. Para tal é necessário transformar as restrições em funções de penalidades.

$$\min_s S F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij} d_{ij} + \sum_{k=1}^n (w_k \cdot k + w_k \cdot k) \quad (2.21)$$

onde:

$$k = \max \{ 0, \max \{ a_k - a_{\max}^k, a_{\min}^k - a_k \} \} \quad k = 1, \dots, n$$

$$(2.22) \quad w_k = \max \{ 0, a_k - a_{\max}^k \} \quad k = 1, \dots, n \quad (2.23)$$

$$w_k, w_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n \quad (2.24)$$

O primeiro termo de F mede o momento de transporte. Ele é definido pelo produto da distância entre as instalações e seu volume de tráfego. O segundo termo representa a função penalidade para as restrições geométricas. O primeiro termo da função penalidade mede a extensão o quanto a restrição de razão de forma é violada. Como cada instalação tem um único nível de tolerância para violar esta restrição, a_k é multiplicado por um fator positivo. Quando as instalações têm orientação variável, a penalidade w_k da razão de forma pode ser calculada por:

$$w_k = \max \{ 0, \max \{ (a_k - \max \{ a_{\max}^k, 1/a_{\min}^k \}), (\min \{ a_{\min}^k, 1/a_{\max}^k \} - a_k) \} \} \} \quad (2.25)$$

Da mesma forma, o segundo termo w_k penaliza a existência de áreas ocupadas sobre as instalações. Pesos para cada instalação são definidos para assegurar os níveis de tolerância das figuras irregulares (Tam, 1992 b).

2.3.8 Outros modelos

Outros modelos utilizando programação linear inteira foram apresentados por Balas e Mazzola (1980), Burkard e Bonninbger (1983) e Frieze e Yadegar (1983).

Heragu e Kusiak (1991) apresentaram dois modelos lineares para o problema de arranjo físico de instalações: um contínuo (utilizando valor absoluto na função objetivo e restrições) e outro misto. O modelo misto tem menor número de variáveis inteiras do que outras formulações existentes para o problema de arranjo físico de instalações. Difere da maioria dos modelos apresentados na literatura por não ser uma linearização do PQA. O modelo contínuo tem uma forma mais compacta. Uma das vantagens nas formulações apresentadas é que os locais de localização não precisam ser conhecidos a priori. As formulações modelam problemas de arranjo físico com instalações de áreas diferentes. Os modelos testados com algoritmos de otimização irrestrito obtêm soluções subótimas de boa qualidade em um tempo computacional relativamente pequeno. O modelo contínuo aparenta ser mais útil para resolver o problema de arranjo físico de instalações que outros modelos apresentados na literatura.

Ritzman et al (1979) formularam um modelo de programação multiobjetivos misto, desenvolveram o programa computacional e resolveram um problema de localização de escritórios num edifício. Para poder avaliar a performance quanto aos resultados, testaram num problema multiobjetivo com seis objetivos conflitantes.

Cambron e Evans (1991) apresentam e ilustram uma abordagem para o complexo problema de projeto de arranjo físico envolvendo múltiplos objetivos conflitantes, levando em consideração entradas que podem ser de ambas as naturezas: qualitativas e quantitativas. A abordagem envolve o uso de diversos algoritmos de projeto de arranjo físico, bem como métodos manuais para gerar arranjo físico candidatos. Esses arranjos físicos candidatos são usados como entrada no Processo Hierárquico Analítico de Saaty na ordem que o problema múltiplos objetivos permite considerar. A aplicação é feita num problema envolvendo arranjo físico comercial relativo à impressão e encadernação.

2.4 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

2.4.1 Classificação dos métodos de solução

Segundo Kusiak e Heragu (1987), desde 1950, foram desenvolvidos diversos estudos para resolver o problema de instalações. Nestes estudos foram apresentados algoritmos que podem ser classificados em dois grupos: algoritmos que apresentam solução ótima e algoritmos que apresentam solução sub-ótima.

Desde o início de 1960, inúmeras pesquisas foram realizadas para desenvolver algoritmos ótimos na solução do problema quadrático de alocação. Esses algoritmos dividem-se em duas classes (Kusiak e Heragu ,1987):

- a) algoritmos de branch and bound;
- b) algoritmos de planos de corte.

Os algoritmos ótimos apresentam a desvantagem de precisarem muito tempo de processamento e muito espaço de armazenamento em memória. O maior problema, para o qual foi determinado o ótimo, tinha 15 instalações.

Por esta desvantagem, as pesquisas foram direcionadas a concentrar-se nos algoritmos sub-ótimos para resolver o problema de arranjo físico.

Os primeiros métodos sub-ótimos não apresentavam soluções de boa qualidade. Através de pesquisas, novos algoritmos foram desenvolvidos, podendo ser classificados em (Kusiak e Heragu ,1987):

- a) algoritmos construtivos;
- b) algoritmos de melhoramento;
- c) algoritmos híbridos;
- d) algoritmos baseados na teoria dos grafos.

Alguns desses métodos sub-ótimos usam gráficos de fluxos (flow charts), procedimentos gráficos aliados à experiência e ao conhecimento do analista de instalações para definir o arranjo físico. Outro método usado para determinar o arranjo físico é o gráfico de relações (Relationships chart). Este método mostra

graficamente a proximidade desejada entre os pares de instalações; este conceito foi introduzido por Muther (1955). A proximidade desejada entre os pares de instalações é representada no gráfico de ligações pelas letras A, E, I, O, U e X. Tais letras indicam se a proximidade entre o par de instalações i e j são: absolutamente necessária, especialmente importante, importante, comum, não importante e indesejável respectivamente. O gráfico de ligações é a base de um método popular denominado de planejamento de arranjo físico sistemático (Muther, 1973). Wimmert (1958) apresenta um modelo matemático para o problema de arranjo físico de instalações que minimiza os fluxos dos produtos e as distâncias entre todas as combinações de instalações. O teorema que serviu de base para o método de Wimmert estava incorreto conforme contra exemplo apresentado por Conway e Maxwell (1961). Buffa (1955) apresentou um método denominado de análise de seqüência, baseado na análise da seqüência de operações das partes de uma planta. Além desses, existem outros métodos desenvolvidos entre as décadas de 50 e 60 que não encontram soluções de boa qualidade. Tais métodos foram apresentados por Foulds (1983) e são denominados métodos esquemáticos e sistemáticos.

Nas seções seguintes, os algoritmos estudados serão apresentados com mais detalhes.

2.4.2 Algoritmos para solução do problema de arranjo físico

2.4.2.1 Algoritmos de branch and bound e planos de cortes

Encontram-se na literatura diversos trabalhos que apresentam a técnica de branch and bound para solução do problema de arranjo físico.

Os dois primeiros algoritmos do tipo branch and bound para solução do problema de arranjo físico de instalações, foram desenvolvidos por Gilmore (1962) e Lawler (1963). A diferença entre seus trabalhos está em computar os limites. Ambos os algoritmos avaliam implicitamente todas as soluções potenciais. Pierce e Crowston (1971) classificam este tipo de enumeração como técnica de enumeração controlada. Caso não fosse considerado um limite para podar a árvore de decisão, como citado nos métodos acima, o procedimento passaria a ser uma técnica de enumeração completa que é ineficiente computacionalmente.

Além destes, dois outros algoritmos foram desenvolvidos por Land (1962) e por Gavett e Plyter (1966). Estes algoritmos alocam pares de instalações enquanto os dois primeiros algoritmos alocam uma instalação por vez.

O algoritmo ótimo tem como característica básica, atribuir passo a passo, uma instalação por vez. Em cada passo ocorrem retornos, onde algumas atribuições são excluídas e o processo de busca continua. Pierce e Crowston (1971) apresentaram um algoritmo que se comporta na base de passo a passo excluindo pares de atribuição da solução do problema. Os algoritmos exatos apresentados utilizam muito espaço de memória e tempo computacional (Burkard, 1984). Lawler e Roucairol (1985) sugerem o uso do algoritmo de branch and bound paralelo para encontrar o ótimo do PQA. Tais algoritmos fazem uma busca paralela (simultânea) sobre vários ramos na árvore de decisão. Entretanto,

resultados computacionais apresentados pelos autores indicam que o algoritmo requer muito tempo computacional para resolver problemas com doze ou mais instalações.

Graves e Whinston (1970) desenvolveram um algoritmo heurístico que se baseia em determinar limites usando propriedades estatísticas da função objetivo. Esses limites são utilizados num procedimento enumerativo que encontra soluções sub-ótimas.

Burkard (1973) propôs um algoritmo ótimo para resolver o problema PQA baseado na redução de uma matriz quadrada. A redução é feita de uma matriz quadrada A para uma outra matriz quadrada A' de elementos não negativos, com pelo menos um zero em cada linha e cada coluna, com o objetivo de reduzir a importância dos termos quadráticos na função objetivo e aumentar a dos termos lineares. Little et al. (1963) utilizaram o processo de redução no problema do Caixeiro Viajante.

Bazaraa (1975) desenvolveu um algoritmo utilizando a técnica de branch and bound para o problema geral de arranjo físico de instalação, obtendo a cada passo um arranjo físico parcial P , no qual determina um limite inferior LB dos custos das possíveis combinações do arranjo físico parcial P . Enquanto LB for menor que o custo do melhor arranjo físico avaliado C^0 , o algoritmo continua alocando uma nova instalação e conseqüentemente aumentando o tamanho $|P|$ do arranjo físico parcial. Quando a busca nesta direção termina e a última instalação não pode ser alocada, uma nova alocação é procurada.

Bazaraa e Elshafei (1979) propuseram um algoritmo que utiliza a técnica de branch and bound para a solução do PQA com base na alocação passo a passo de uma instalação em locais ainda não ocupados.

Burkard (1984) apresenta uma revisão sobre o problema quadrático de atribuição.

Kaku e Thompson (1986) apresentaram outro algoritmo utilizando a técnica de branch and bound, com melhor desempenho que o algoritmo de Lawler (1963), especialmente quando os problemas são grandes.

Heragu e Kusiak (1991) apresentaram dois modelos para a solução do problema de arranjo físico de instalação: o primeiro linear contínuo com valor absoluto na função objetivo e nas restrições, outro linear misto.

Palekar et al. (1992) apresentaram um método exato e sugere heurísticas para resolver o problema de arranjo físico estocástico dinâmico.

Kelly et al. (1994) apresentaram uma abordagem determinística através da busca tabu, que tem se mostrado mais poderosa que a simples mudança aleatória.

Kouvelis et al. (1995) apresentaram uma aplicação de um método ótimo na solução do problema de arranjo físico de máquina em linha.

Os algoritmos que utilizam o método de plano de corte para resolver o problema

quadrático de alocação foram desenvolvidos por Bazaraa e Sherali (1980) e Burkard e Bonninger (1983).

Os algoritmos ótimos que utilizam as técnicas de branch and bound e de planos de corte, gastam muito espaço de memória e tempo computacional na solução dos problemas quadráticos de alocação. Para exemplificar, o maior problema resolvido para o qual foi obtida a solução ótima, por um algoritmo de planos de corte, tinha oito instalações. Outra experiência com estes algoritmos demonstra que a solução ótima encontrada no processo de busca nos vértices da árvore só foi obtida após um número expressivo de soluções terem sido testadas (Burkard e Stratman, 1978 e Bazaraa e Kirca, 1983), o que estimulou encerrar o processo de buscas no branch and bound antecipadamente, sem verificar a otimalidade, surgindo a aplicação de algoritmos heurísticos de branch and bound.

Burkard (1984) apresentou dois critérios para o processo de término do algoritmo branch and bound:

- a) o primeiro critério é baseado na limitação do tempo, no qual o algoritmo pára após exceder um limite de tempo pré-definido;
- b) o segundo critério é baseado na qualidade do limite superior, isto é, após um tempo de processamento não obtendo um acréscimo na solução, o limite superior é reduzido de uma certa percentagem.

2.4.2.2 Algoritmos construtivos

Nos algoritmos construtivos a solução é construída passo a passo. Em outras palavras, as instalações são alocadas uma por vez, até o arranjo físico estar completo.

Um estudo apresentado por Moore (1974) indica a existência de duas vezes mais algoritmos construtivos que algoritmos de melhoramento. Alguns dos mais conhecidos algoritmos de construção são: HC66 (Hiller e Connors, 1966), ALDEP (Seehof e Evans, 1967), CORELAP (Lee e Moore, 1967), RMA Comp I (Murther e McPherson, 1970), MAT (Edwards et al., 1970), PLANET (Deisenroth e Apple, 1972), LSP (Zoller e Adendorff, 1972), Algoritmo de alocação linear (Neghabat, 1974), FATE (Block, 1978), INLAYT (O'Brien e Abdel Barr, 1980), FLAT (Heragu e Kusiak, 1986) e COMLADII (Ziai e Sule, 1991).

Ketcham et al. (1989) apresentaram um estudo comparando uma versão modificada do ALDEP, o PLANET e o FLAG.

2.4.2.3 Algoritmos de melhoramento

A característica básica do algoritmo de melhoramento é gerar aleatoriamente uma solução inicial e com base nesta solução, realizar trocas sistemáticas entre instalações e avaliar os resultados. As trocas que produzem uma solução melhor são guardadas e o procedimento continua até que não se obtenha uma solução melhor. Logo o algoritmo de melhoramento depende muito da qualidade da solução inicial. A seguir são citados alguns algoritmos de melhoramento:

- a) CRAFT (Armour e Buffa, 1963; (Buffa et al., 1964);
- b) variações do CRAFT: COFAD (Tompkins e Reed, 1976), baseado na técnica (Nugent et al., 1968), COL (Vollman et al., 1968), CRAFT-M (Hicks e Cowan, 1976), SPACECRAFT (Johnson, 1982), CRAFT - 3D (Cinar, 1975), SPACECRAFT (Jacobs, 1984), MOCRAFT (Svestka, 1990) e FACLO (Allenbach e Werner, 1990);
- c) outros algoritmos: H63 (Hillier, 1963), H63 - 66 (Hillier e Connors, 1966), COL (Vollman et al., 1968), Algoritmos SAMPLING 1o. (Nugent et al., 1968) e 2o. (Hitchings e Cottam, 1976), PRAT (Khalil, 1973), COFAD (Tompkins e Reed, 1976) e COFAD - F (modificado por Shore e Thompkins, 1980), Algoritmo revisado de Hillier (Picone e Wilhelm, 1984).

Co et al. (1989) desenvolveram um modelo para solução de problemas com sistema de manufatura flexível, que é uma extensão do CRAFT incorporando um modelo, computacionalmente eficiente de filas em rede.

Galbraith e Miller (1990) apresentam o método MASL (*a Multifactor Approach for Selecting from among computer generated Layouts*) que faz uma análise em termos de medidas quantitativas tais como: ineficiência de fluxo, distância entre áreas funcionais e aumento de capacidade. Os softwares utilizados para gerar os arranjos físicos de teste foram CRAFT, ALDEP E CORELAP.

Cambron e Evans (1991) apresentaram a aplicação do método analítico hierárquico de Saaty num problema para encontrar um arranjo para impressão comercial e encadernação.

Lacksonen (1997) apresenta um modelo e um algoritmo de melhoramento para a solução do problema de arranjo físico de instalações dinâmico com áreas diferentes.

2.4.2.4 Algoritmos híbridos

Bazaraa e Kirca (1983) classificam os algoritmos de híbridos quando possuem características dos algoritmos ótimos e sub-ótimos ao mesmo tempo. Exemplos de tais algoritmos são apresentados por Burkard e Stratman (1978), Bazaraa e Sherali (1980), Bazaraa e Kirca (1983), Elshafei (1977) e Scriabin e Vergin (1985). Incluem-se nesta lista os dois últimos, por usarem os princípios dos algoritmos de construção e de melhoramento.

Burkard e Stratman (1978) propuseram um algoritmo heurístico que usa o método de branch and bound e o algoritmo de melhoramento. Obtém uma solução inicial usando o algoritmo de branch and bound e um limite de tempo. Esta solução inicial, passa então, através de um algoritmo de melhoramento denominado VERBES. Este algoritmo executa trocas em forma de pares (2-opt) e até de triplas (3-opt), alternadamente, e pára quando a solução não pode ser melhorada.

Burkard e Stratman (1978) propuseram um algoritmo similar ao anterior utilizando para encontrar a solução inicial o algoritmo de Gaschutz e Ahrens (1968).

Bazaraa e Kirca (1983) apresentaram dois algoritmos, um algoritmo ótimo e o segundo um algoritmo heurístico obtido através de modificações no primeiro. O algoritmo heurístico é baseado no método de branch and bound que reduz o tempo de processamento não explorando vértices que são uma imagem invertida de um vértice explorado anteriormente. Em outras palavras, se o vértice A é uma imagem invertida do vértice B o limite inferior já foi calculado anteriormente, então em buscas futuras não precisa fazer trocas no vértice A. Os métodos heurísticos, utilizando os algoritmos de melhoramento de 2-way e 4-way e uma regra para selecionar vértices a serem pesquisados, produzem resultados de boa qualidade.

A seguir são citados alguns algoritmos híbridos:

- FLAC (Scriabin e Vergin, 1985);
- DISCON (Drezner, 1980);
- Houshyar e White (1997).

2.4.2.5 Algoritmos que utilizam a teoria dos grafos

Os algoritmos que utilizam a teoria dos grafos buscam um sub-grafo maximal planar a partir de um grafo completo que mostra a relação entre as instalações. O dual deste sub-grafo maximal planar determina o arranjo físico de instalações. Existem algoritmos que podem ser classificados como algoritmos que utilizam a teoria dos grafos e como algoritmos construtivos e são apresentados neste item.

Seppanen e Moore (1970) propuseram um procedimento utilizando a teoria dos grafos acima mencionada. Os mesmos autores em 1975, propuseram um algoritmo heurístico utilizando a mesma estratégia. O algoritmo determina a árvore máxima com base no grafo maximal. Com a ajuda de um processo de adição de eixos, a árvore máxima é então usada para obter o sub-grafo maximal planar, e do dual do sub-grafo maximal planar determina-se um arranjo físico para as instalações.

Outros algoritmos que utilizam a teoria dos grafos foram apresentados por:

- algoritmo de branch and bound (Foulds e Robinson, 1976);
- algoritmo Deltahedron (Foulds e Robinson, 1978);
- algoritmo Wheel expansion (Eades et al., 1982);
- Kim et al. (1996) apresentaram um modelo para resolver o problema de localização de máquinas em linhas simples e múltiplas para períodos curtos e longos, utilizando a teoria de *simulated annealing* e teoria dos grafos;
- Métodos heurísticos que transformam o sub-grafo máximo planar em um arranjo físico de instalações com áreas diferentes foram apresentados por Irvine e Rinsma-Melchert e por Watson e Giffin (1997);
- Wascher e Merker (1997) apresentam um estudo comparativo entre os métodos heurísticos.

2.4.2.6 Outros métodos encontrados na literatura

Com o avanço da tecnologia na informática, novas técnicas foram propostas na área de Inteligência Artificial, tais como:

- Sistemas Especialistas que consistem em prover o computador de mecanismos e meios, de forma que ele aja como se fosse um especialista em alguma área de interesse de uma determinada ciência (Cunha e Ribeiro, 1987).
- Redes Neurais que estudam algoritmos que simulam o comportamento dos neurônios.

A partir destas novas ferramentas, observam-se na literatura outros métodos que estão sendo utilizados na solução do problema de arranjo físico.

Abdou e Dutta (1990) apresentaram um sistema especialista em EXSYS que utiliza uma base de dados para obter arranjo físico de máquina sobre combinações específicas de manufatura e sistemas de mão de obra. A base de dados incorpora seis fatores, relacionando a variedade e quantidade de produtos, grau de flexibilidade, nível de automação, sistema de mão de obra, peças em acabamento, considerações gerais.

Sirinaovakul e Thajchauapong (1994) apresentaram um modelo construtivo, baseado em técnicas da Inteligência Artificial. O sistema consiste de alocação de padrões, um método de busca heurística e um sistema de base de dados.

Badiru e Arif (1996) apresentaram um sistema FLEXPART que considera na solução a natureza multicritério do problema de arranjo físico e as variações dos dados de entrada pela integração de um sistema especialista e um algoritmo baseado na teoria da lógica difusa.

Welgama e Gibson (1996) apresentaram um modelo para solução de arranjo físico e sistemas de mão de obra dinâmico integrando abordagens metodológicas de base de dados e otimização.

Evans et al. (1987) apresentaram uma heurística utilizando a teoria de conjuntos difusos na solução do problema de arranjo físico de departamentos. Esta heurística utiliza descrição aproximada para duas categorias distintas do desenho: proximidade e importância expressas na forma de relações difusas para cada par de departamentos.

Rosenblatt e Lee (1987) apresentaram métodos de robustez usados na solução de problemas de arranjo físico com demandas estocásticas para períodos simples.

Golany e Rosenblatt (1989) apresentaram um algoritmo heurístico para resolver o problema quadrático de atribuição. O algoritmo tem três fases distintas: construtiva, atribuição e melhoramento.

Malakooti (1989) apresentou um algoritmo heurístico, na solução do problema de arranjo físico de instalações multiobjetivos, que gera eficientes arranjo físico a partir de trocas de pares de departamentos.

Heragu e Kusiak (1990) apresentaram dois modelos para resolver o problema de arranjo físico de máquinas em sistemas manufatureiros automatizados. Destes modelos derivam um sistema baseado em conhecimento para a solução do problema de arranjo físico de máquinas. Neste sistema são combinados os conceitos de otimização e sistemas especialistas considerando fatores tanto quantitativos quanto qualitativos.

Savsar (1991) apresentou um método sistemático e um algoritmo de simulação para resolver o problema de arranjo físico flexível de instalações. Critérios tais como minimizar o custo total de mão de obra, maximizar a razão total de proximidade entre departamentos, minimizar os custos futuros com mudanças e minimizar o custo total de mão de obra esperado em possíveis mudanças futuras são incorporados no modelo.

Kaku et al. (1991) apresentaram um procedimento heurístico combinando um método construtivo com um procedimento de trocas usado repetidamente.

Tam (1992a) apresentou um algoritmo utilizando a técnica de *simulated annealing* e compara com dois métodos de busca local.

Hassan (1994) apresentou um estudo do problema de arranjo físico de máquinas em modernas instalações manufatureiras e sugere áreas potenciais de pesquisa.

Malmborg (1994) apresentou um método analítico para o problema de arranjo físico com previsão de estoques de peças em processamento, resultante de um número fixo de loop, alimentado por veículos automatizados. O modelo apresentado utiliza dois algoritmos, um de busca de melhoramento local e outro de *simulated annealing*.

Raoot e Rakshit (1994) apresentaram uma heurística para solução do problema de arranjo físico de instalação, formulado como um problema quadrático de atribuição com simples e múltiplos objetivos, baseada na teoria do conjunto difuso.

2.5 COMENTÁRIOS FINAIS

Dentre os estudos realizados na solução do problema de arranjo físico de instalações, observou-se que poucos são os trabalhos que tratam do problema de conexão entre instalações através de corredores.

Moon e McRoberts (1989) apresentaram um sistema experimental FULKES (Facility Layout Using Knowledge-based Expert System).

Montreuil e Ratliff (1989), por exemplo, apresentaram um método que determina uma árvore de relacionamento entre as instalações minimizando suas distâncias através da *Cut Trees* e constrói o arranjo físico sobre um esquema de corredores construído de forma livre a partir da *Cut Trees*.

Langevin et al. (1994) apresentaram um método que define um corredor principal usado para movimentar entre as células de trabalho, localizadas em ambos os

lados e para armazenar temporariamente peças que estão sendo processadas. O método se compõe de dois passos, no primeiro gera a ordem das células e o segundo determina para cada célula a localização, considerando suas dimensões bem como a localização de entradas e saídas.

Tretheway e Foote (1994) apresentaram um método construtivo, que gera uma estrutura de corredores e a localização das instalações a partir da matriz de fluxos, utilizando o *scatter diagram* proposto por Drezner (1987).

Como se observa dentre os modelos apresentados na literatura, para a solução do problema de arranjo físico, poucos se preocuparam com o problema de forma das instalações. Nos estudos que procuraram atender este quesito cita-se: Tam e Li (1991), Tam (1992a), Tam (1992b) e Furtado e Lorena (1997). Como o problema deve atender dois objetivos conflitantes, fluxo e forma, ficou mais favorecido o atendimento quanto à minimização dos fluxos, enquanto que o problema de forma que viabiliza o projeto da fábrica não fica resolvido. Outro item observado é em relação a conexão entre instalações não adjacentes que podem ser feitas através de corredores, poucos discutem esta realidade e os trabalhos apresentados são mais construtivos sem muita preocupação com a questão da forma. Com o objetivo de atender estes problemas é que se propõe este trabalho.