Análise de Redes de Transportes

Útil também para várias outras áreas além de Transportes!

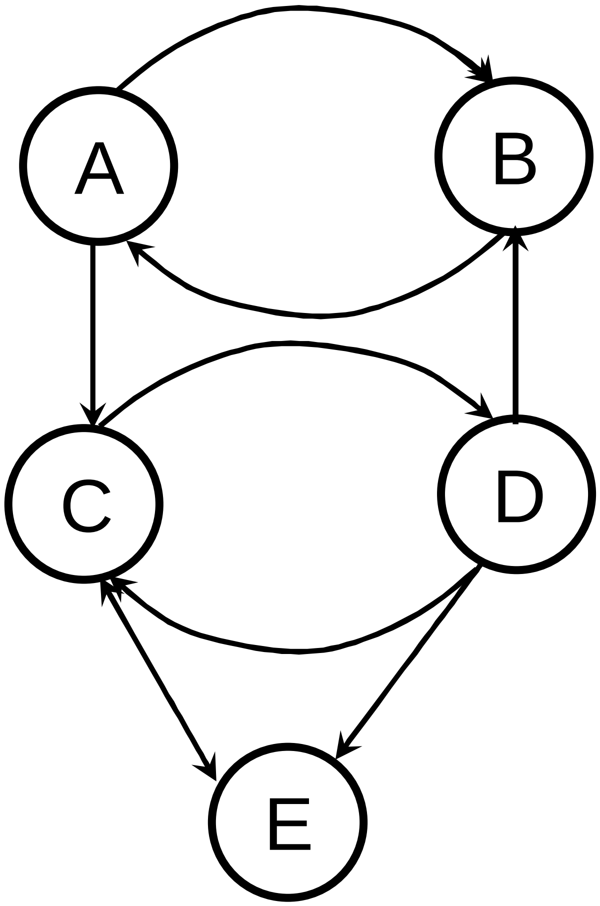
Roteiro da apresentação

- Conceitos e definições
- Caminho mínimo
- Árvore de caminhos mínimos
- Introdução ao problema do caixeiro viajante e ao problema do carteiro chinês

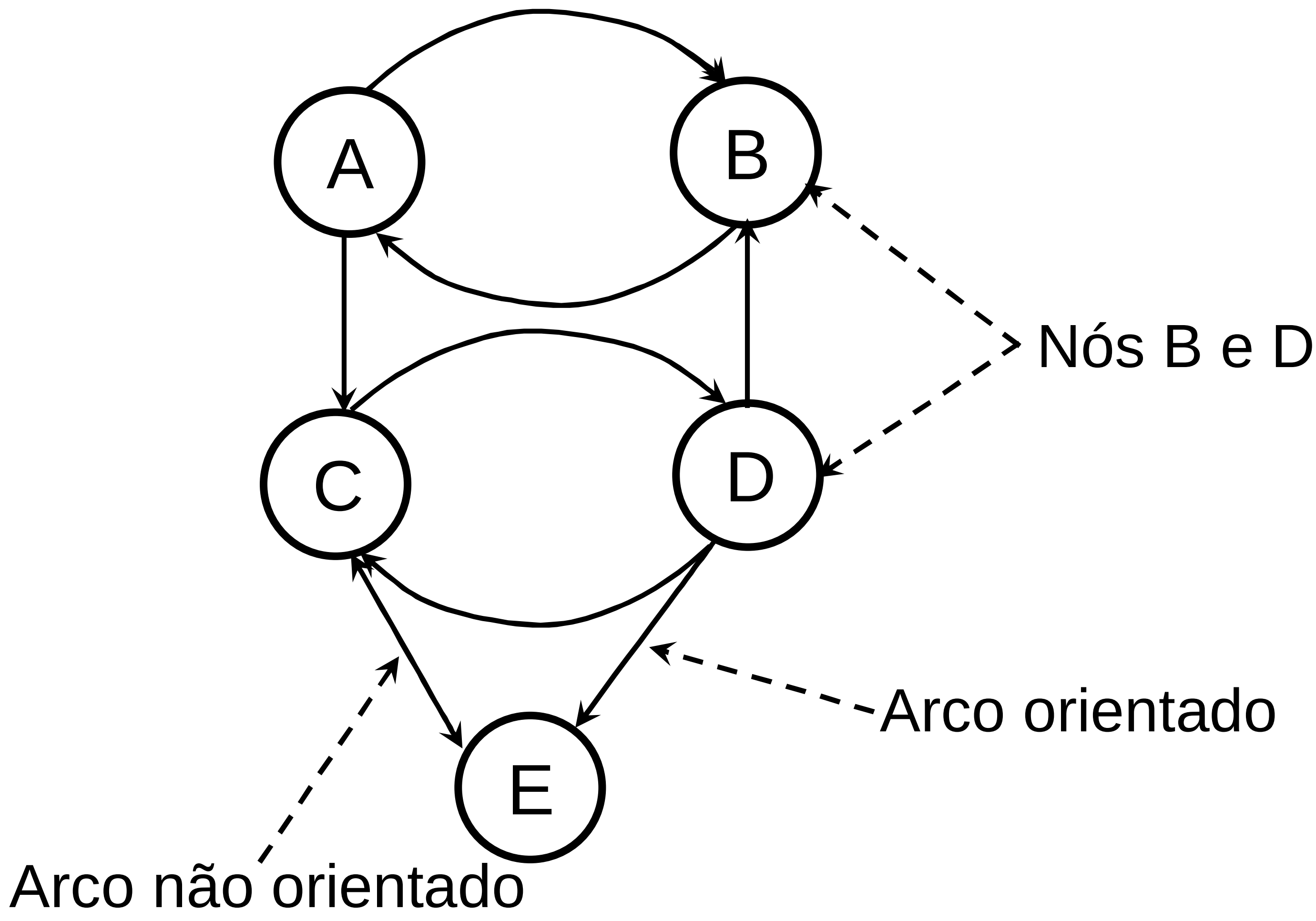
Relembrando o capítulo 3

- Quando adicionamos segmentos discretos de ruas, adicionamos 1/3 do comprimento da quadra na distância média de viagem
- Que tal considerarmos então uma rede orientada, ou seja, composta por várias ruas com sentidos de tráfego alternados?
- A utilização de redes de transporte discretiza a geografia

Rede ilustrativa



Terminologia da rede



Exemplos de Nós e Arcos

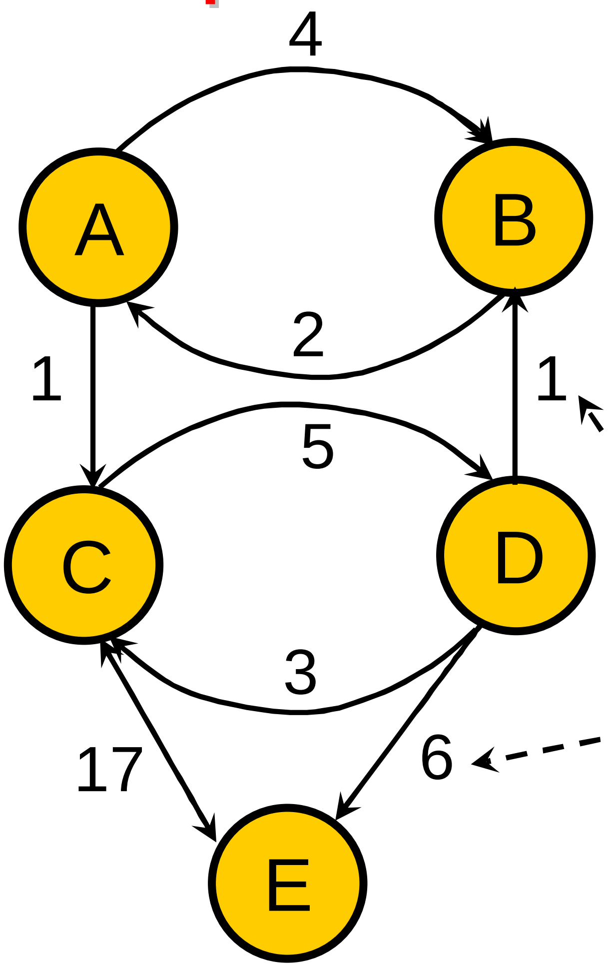
Nós

- Interseções entre ruas
- Bairros, vilas
- Cidades
- Conexões elétricas
- Metas de um projeto

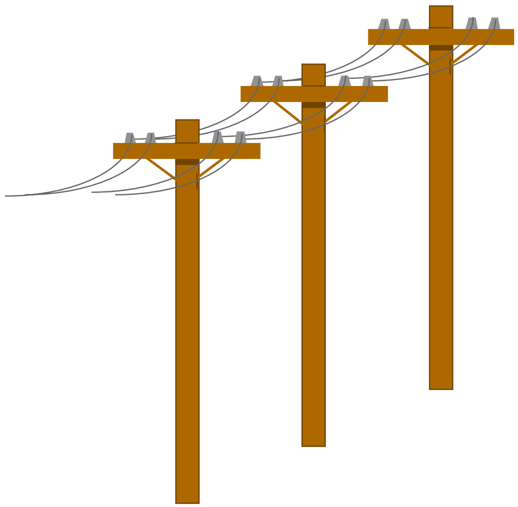
Arcos

- Segmentos de ruas
- Estradas
- Tempo de viagem de uma aeronave
- Componentes de um circuito elétrico
- Tarefas de um projeto

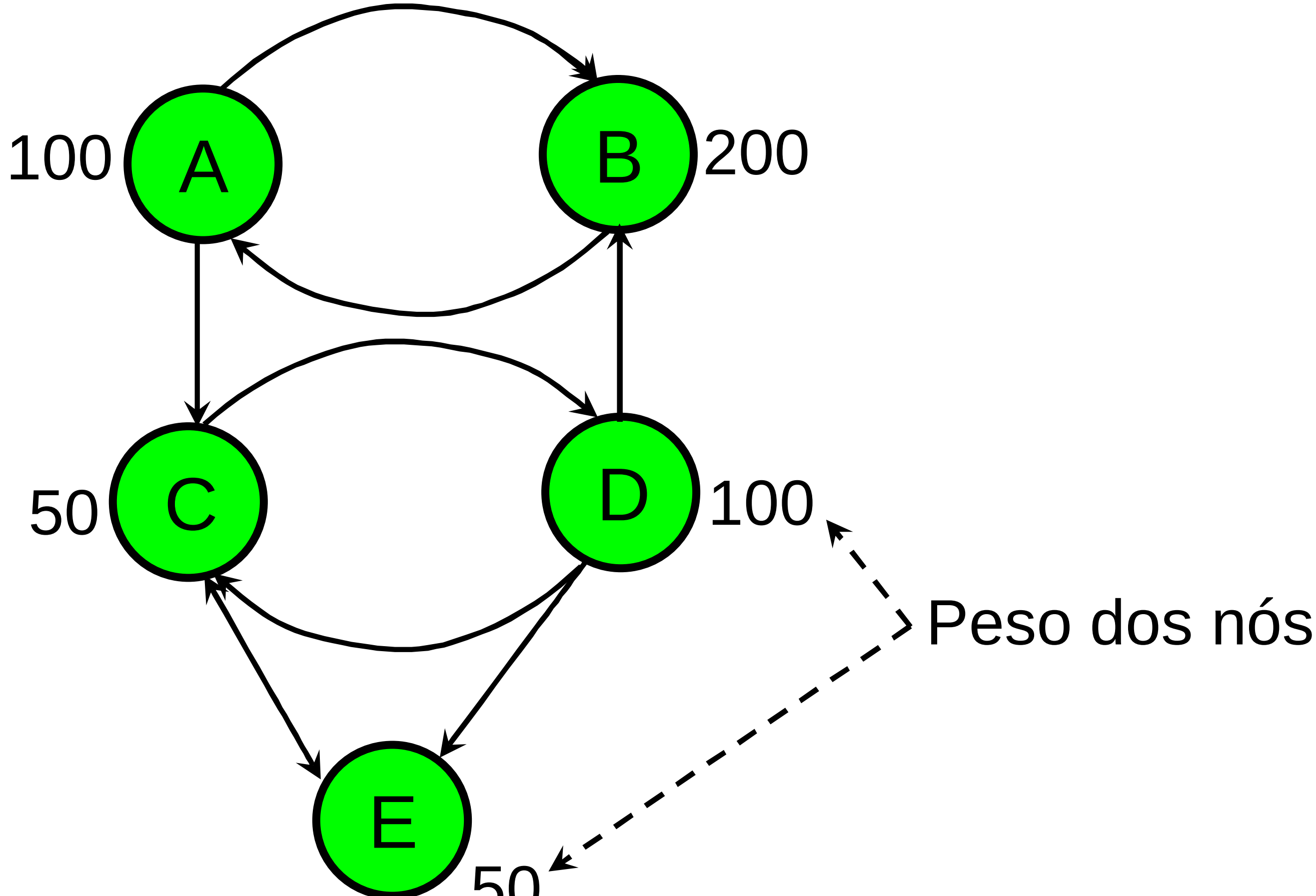
Arcos podem ter “comprimentos”



Comprimentos dos arcos

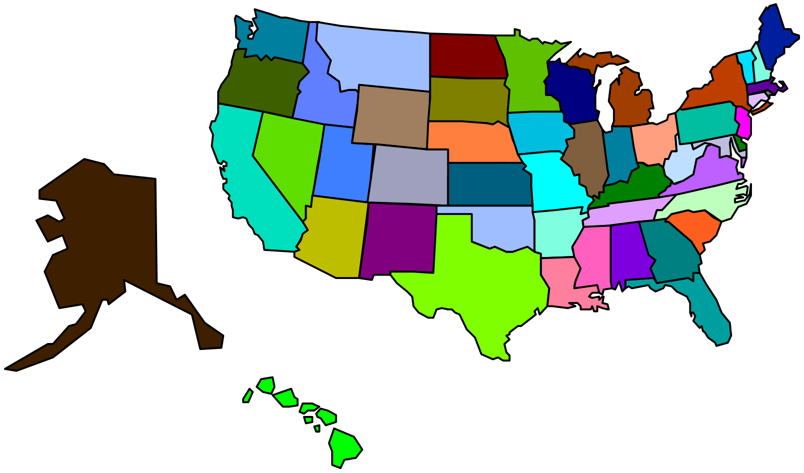


Nós podem ter “pesos”

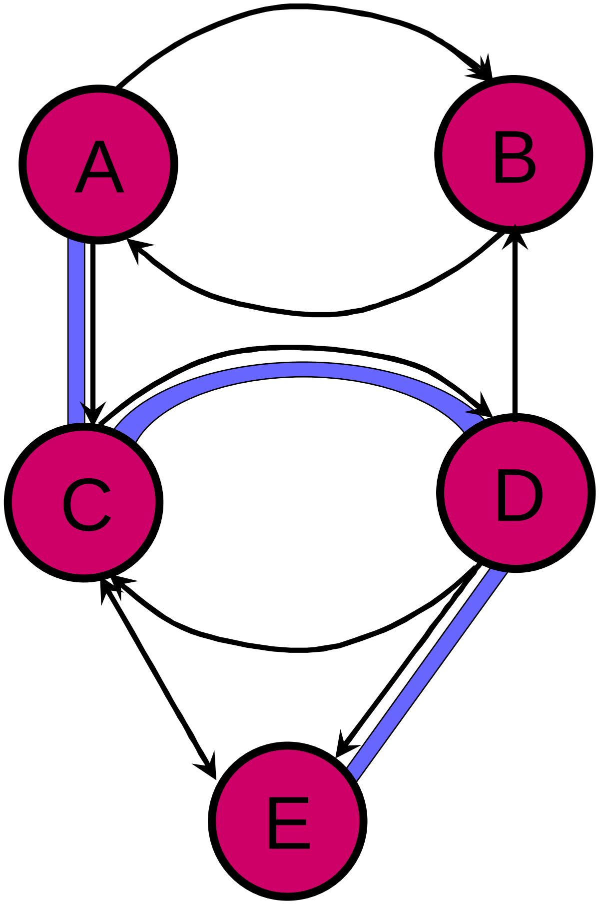


Exemplos de pesos dos nós?

- População de uma cidade
- % da população por zona
- % da eletricidade consumida por região

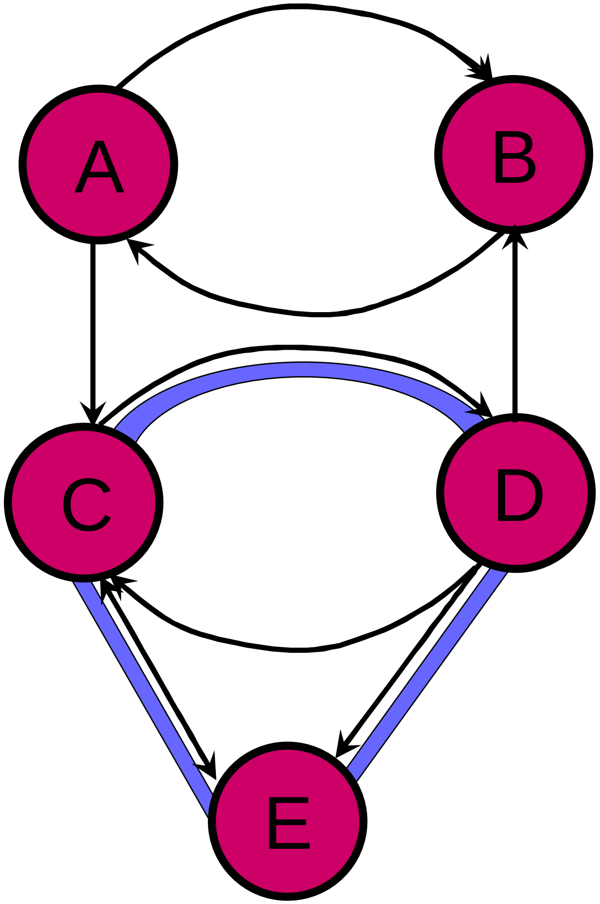


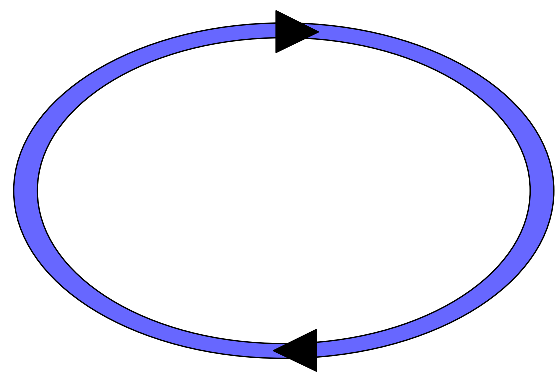
Podemos nos deslocar através de CAMINHOS

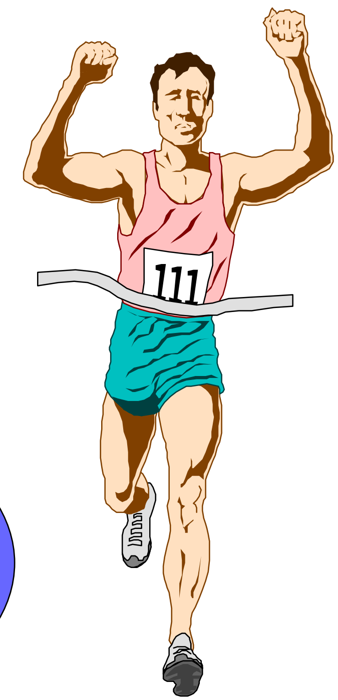


Caminho: A➔C➔D➔E

Um caminho especial é um CICLO



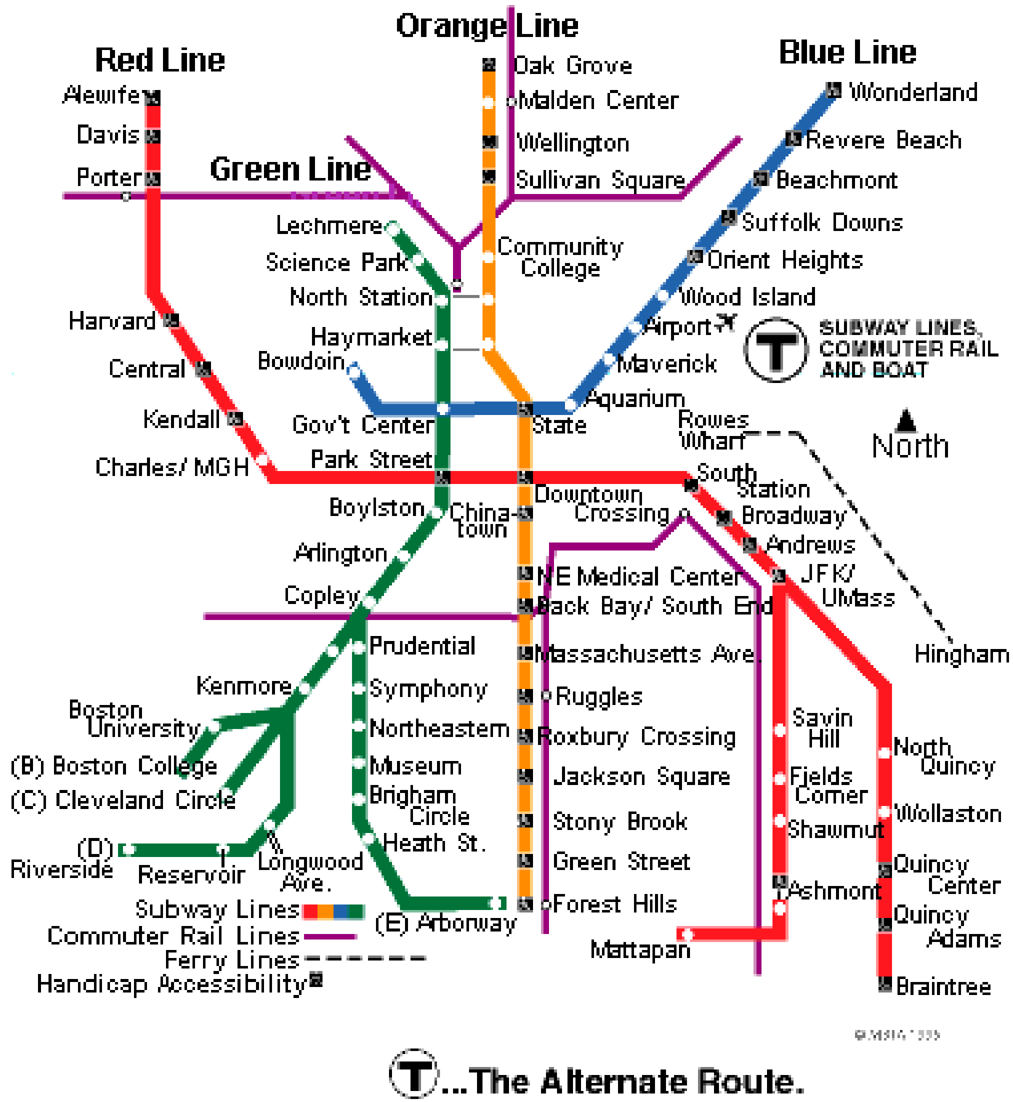




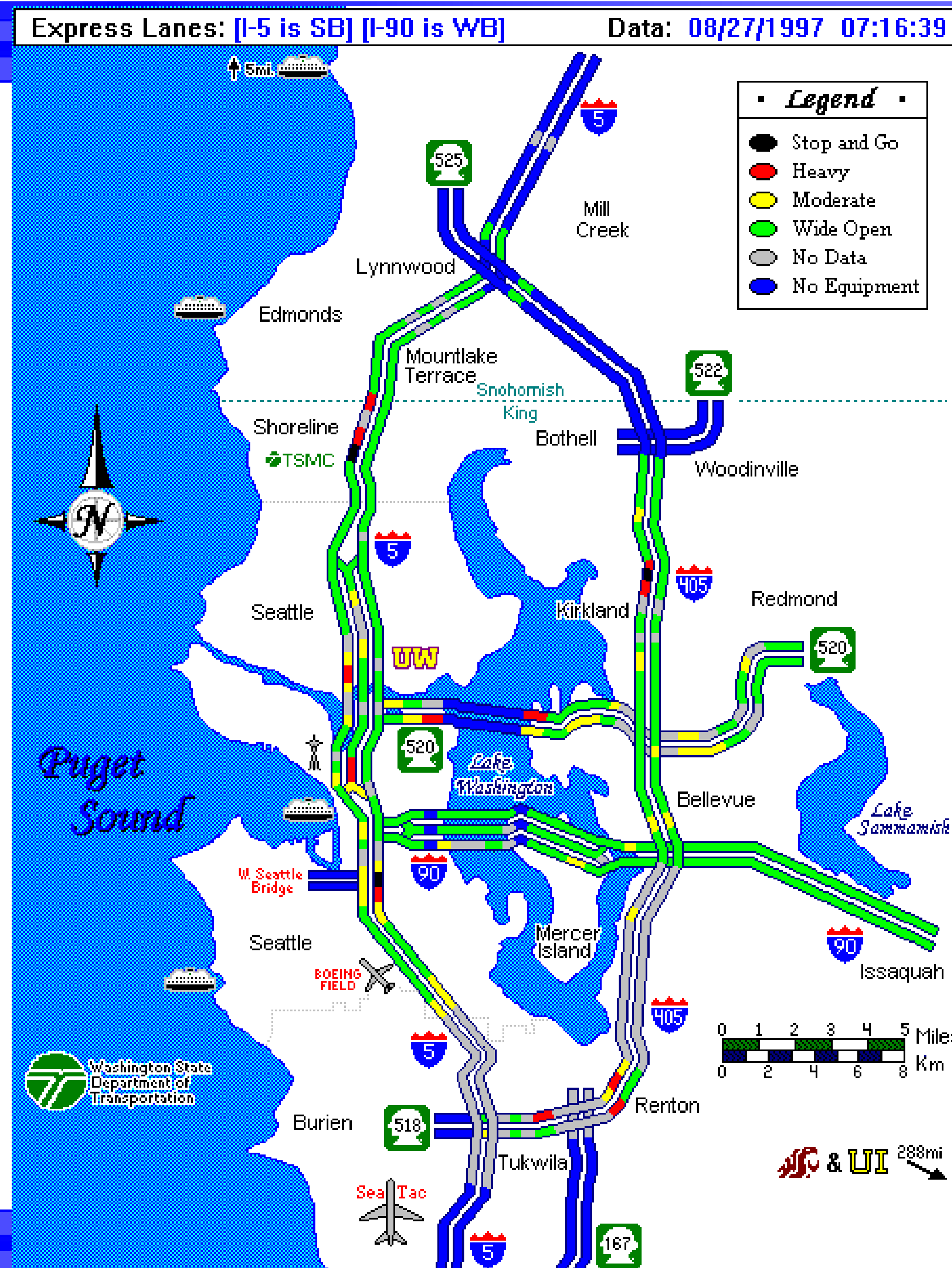
Ciclo: C➔D➔E➔C

Alguns exemplos de redes

Metrô de Boston



- Rede de rodovias expressas em Seattle



Rede de rotas de balsas em Seattle

Rede de telecomunicações

Terminologia de redes

- N = conjunto de nós
- A = conjunto de arcos
- G(N,A)
- Arco incidental
- Nós adjacentes
- Arcos adjacentes
- Caminhos
- Grau de um nó
- Semigrau interno
- Semigrau externo
- Ciclo ou circuito
- Nós conexos
- Grafo não orientado conexo
- Grafo orientado fortemente conexo
- Sub-grafo

Terminologia de redes - 2

- Uma árvore de uma rede não orientada é um sub-grafo conexo que não possui ciclos
- Uma árvore contendo t nós possui (t–1) arestas
- Uma árvore de caminhos mínimos de G(N,A) é uma árvore contendo todos os n nós de N
- Comprimento de um caminho S

$$L(S) = \sum_{(i,j)\in S} l(i,j)$$

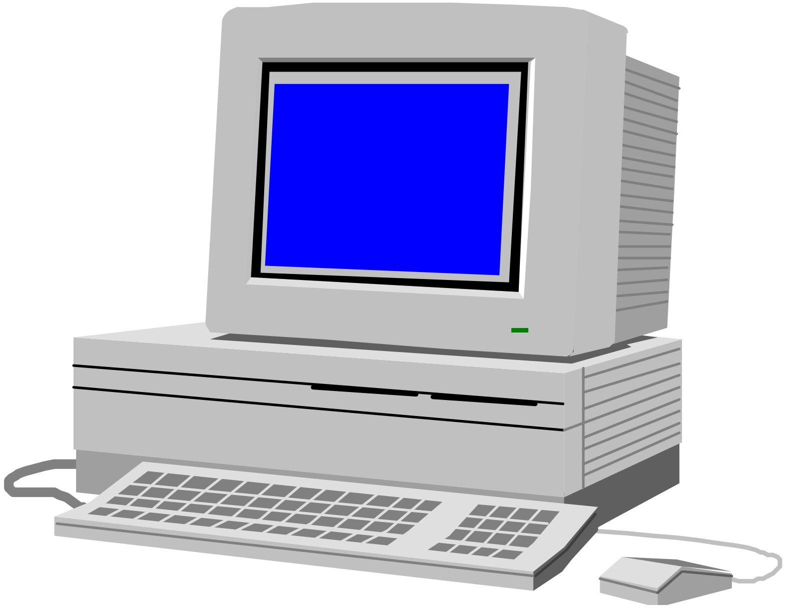
- d(x,y), d(i,j)

Alguns problemas de tomada de decisão em redes

Aspectos de locação ou distribuição em uma rede

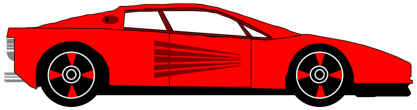
Problemas de roteamento

- Problema do caminho mínimo
- Problema do caixeiro viajante
- Problema do carteiro chinês



Problema do caminho mínimo

- **Encontre o menor caminho entre dois nós, iniciando no Nó O e terminando no Nó D.**
  - O: Nó de Origem
  - D: Nó de Destino

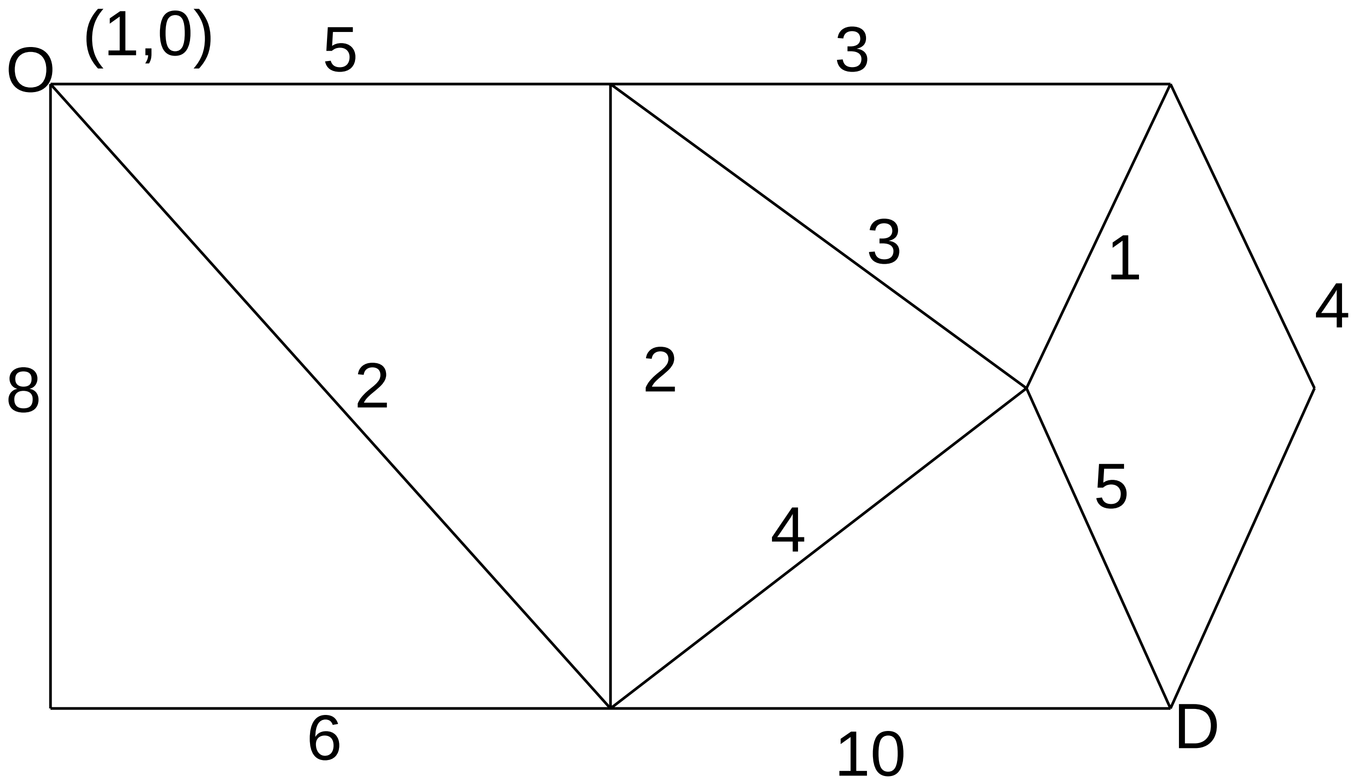


Algoritmo de rotulação de nós: Dijkstra

- Caminho mínimo a partir de um nó
- k=1, inicie no nó de origem
- Ao final da iteração k, o conjunto de k NÓS FECHADOS é formado pelos k nós mais próximos da origem
- Cada NÓ ABERTO adjacente a um ou mais nós fechados indica (nesta iteração) a melhor estimativa da distância mínima até esse nó

Algoritmo de Dijkstra - 2

- Cada melhor estimativa representa um caminho possível e, eventualmente, o caminho ótimo
- Próximo passo: Feche o nó mais próximo dentre as MELHORES ESTIMATIVAS.
- Realize iterações, atualizando as melhores estimativas.
- Repita o processo passando de k para k+1.



(k,d)=(iteração k, menor distância do nó O)

Complexidade computacional
Rede com n nós

- Cada iteração: até n verificações
- Até n iterações
- Implica em uma complexidade $O(n^2)$
- Para o grafo todo: complexidade $O(n^3)$

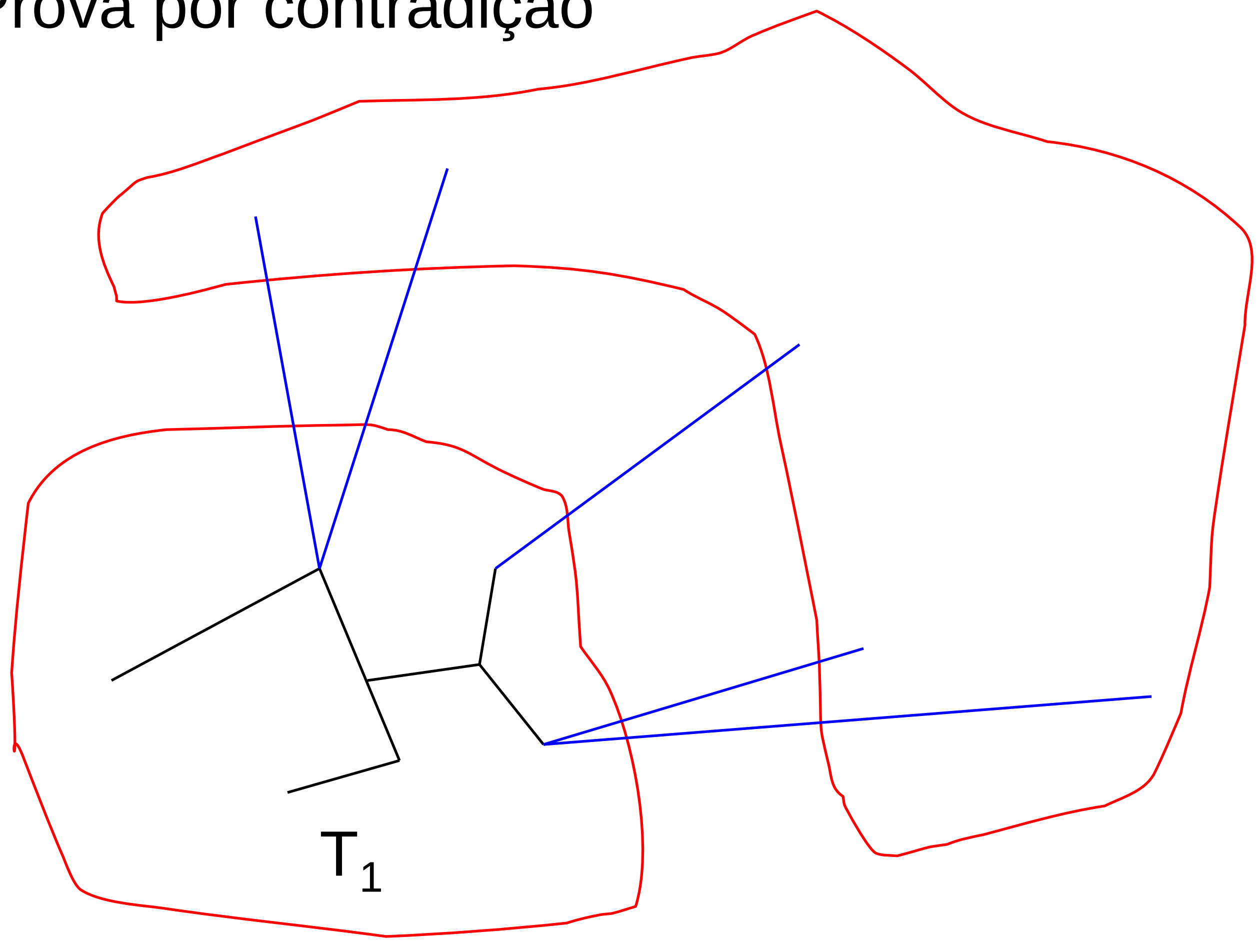
Problema da árvore de caminhos mínimos

- Considere um grafo não orientado
- Por que este é um problema importante?
- Problema: Encontre a árvore de caminhos mínimos de G(N, A).
- Se |N|=n, então cada árvore contém (n-1) arcos.
- Á árvore de caminhos mínimos pode não ser única

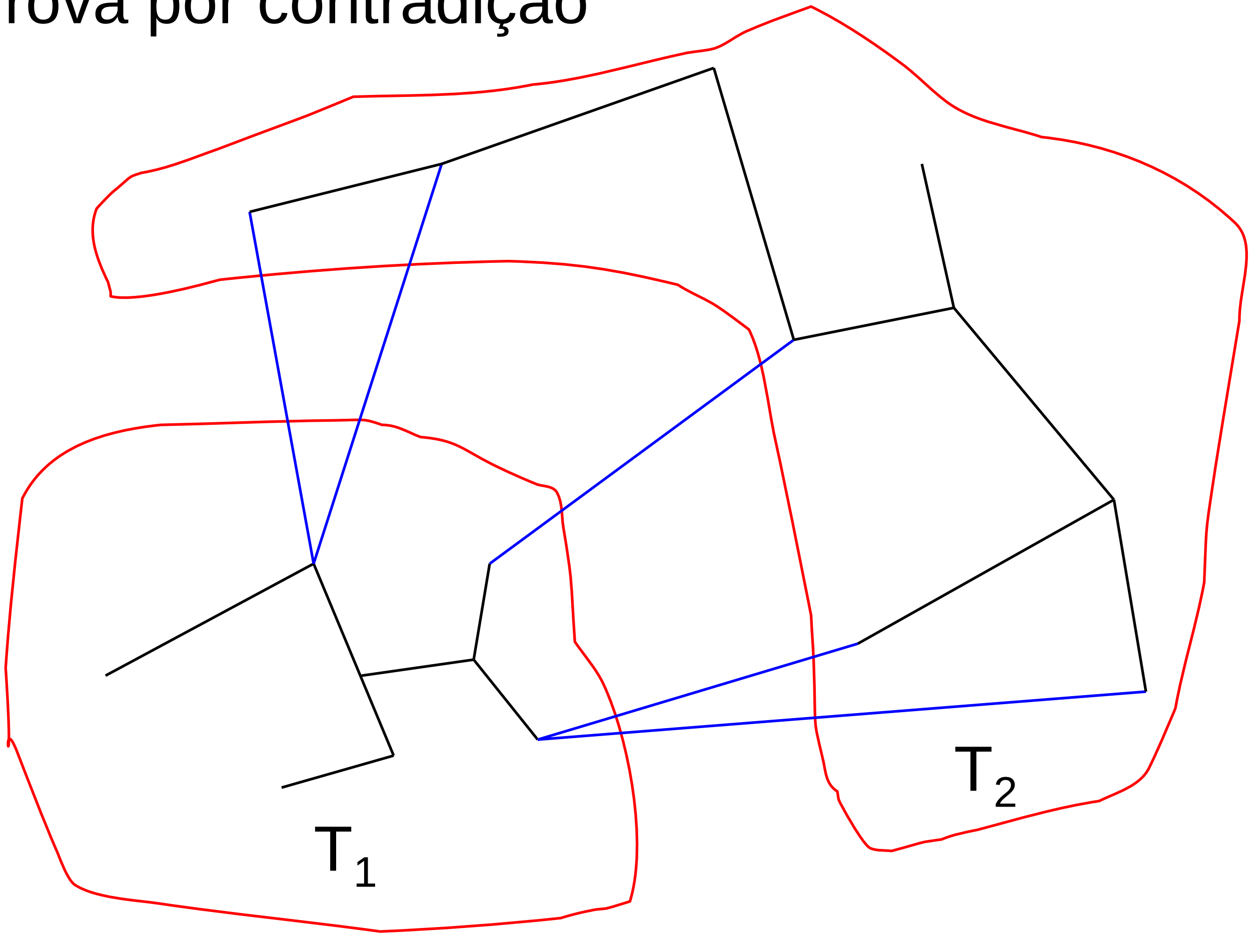
Árvore de caminhos mínimos

- Algoritmo: Comece em um nó qualquer. Conecte iterativamente cada nó não conectado mais próximo à sub-árvore que está sendo formada.

Prova por contradição

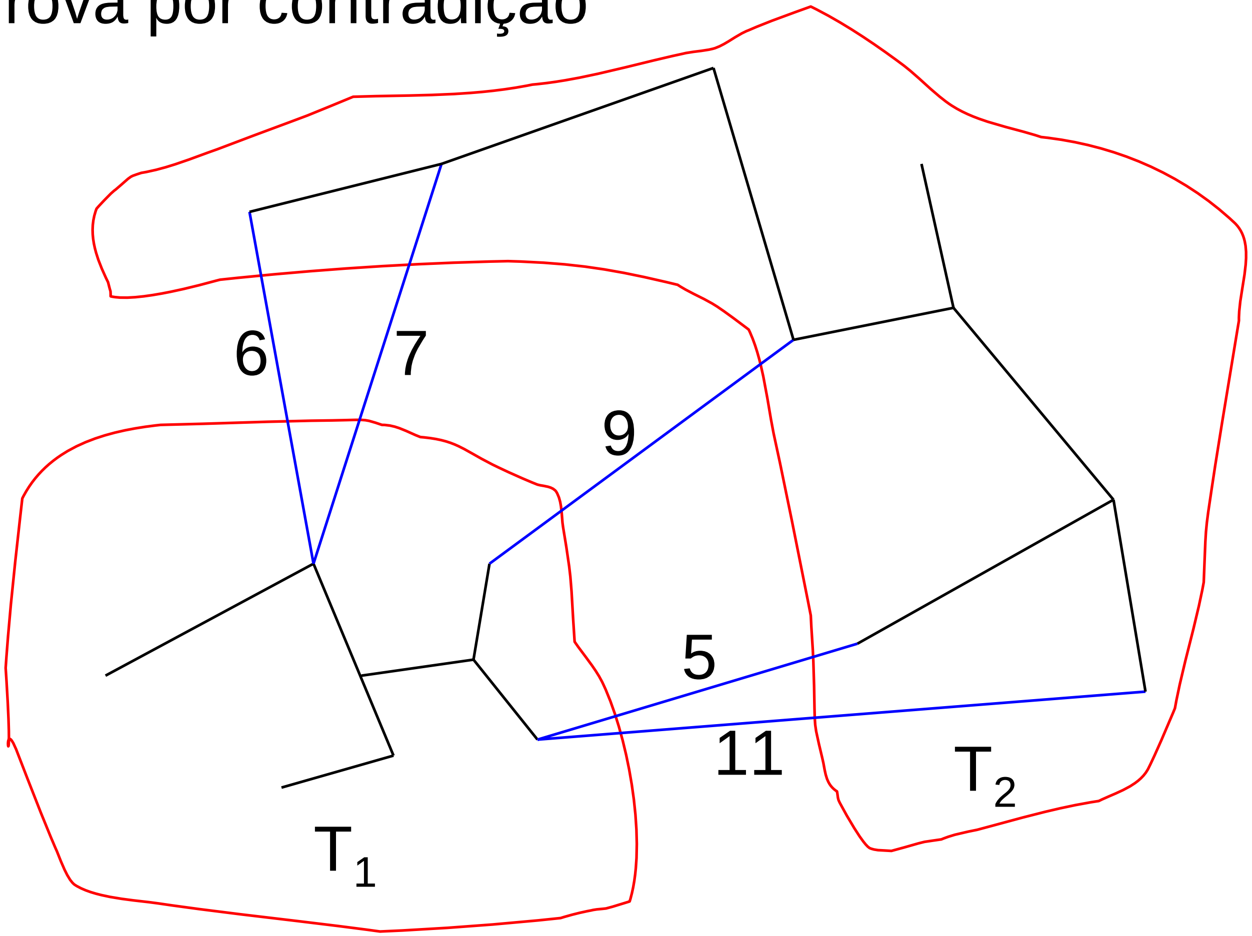


Prova por contradição



Árvore de caminhos mínimos = T_1 + T_2 + (um arco conector)

Prova por contradição



Árvore de caminhos mínimos = T_1 + T_2 + (um arco conector)

Corolário

- Em uma rede não orientada G, o arco de menor comprimento saindo de qualquer nó é parte da árvore de caminhos mínimos.

Outro algoritmo para árvores de caminhos mínimos

- Classifique os arcos em função de seus comprimentos e adicione-os à árvore vigente (um grupo de sub-árvores), certificando-se que nenhum ciclo seja criado
- Este é um bom algoritmo manual, mas sua implementação computacional é mais complexa.

Complexidade computacional na determinação da árvore de caminhos mínimos

- Considere um grafo G completamente conectado
- Iteração 1: (n-1) comparações para achar o caminho mínimo. Rotule cada nó com a distância até o nó inicial.

Complexidade computacional na determinação da árvore de caminhos mínimos

- Iteração 2:
  - Encontre as distâncias dos nós recém adicionados a cada um dos nós que não pertencem à árvore e substitua os rótulos onde for necessário. Requer (n – 2) comparações
  - Encontre o menor valor dentre os rótulos. Requer (n – 2) comparações adicionais

Complexidade computacional na determinação da árvore de caminhos mínimos

- Iteração j:
  - Encontre as distâncias dos nós recém adicionados a cada um dos nós que não pertencem à árvore e substitua os rótulos onde for necessário. Requer (n – j) comparações
  - Encontre o menor valor dentre os rótulos. Requer (n – j) comparações adicionais

$$\text{nº de cálculos} = (n-1) + 2\sum_{j=2}^{n}(n-j) =$$

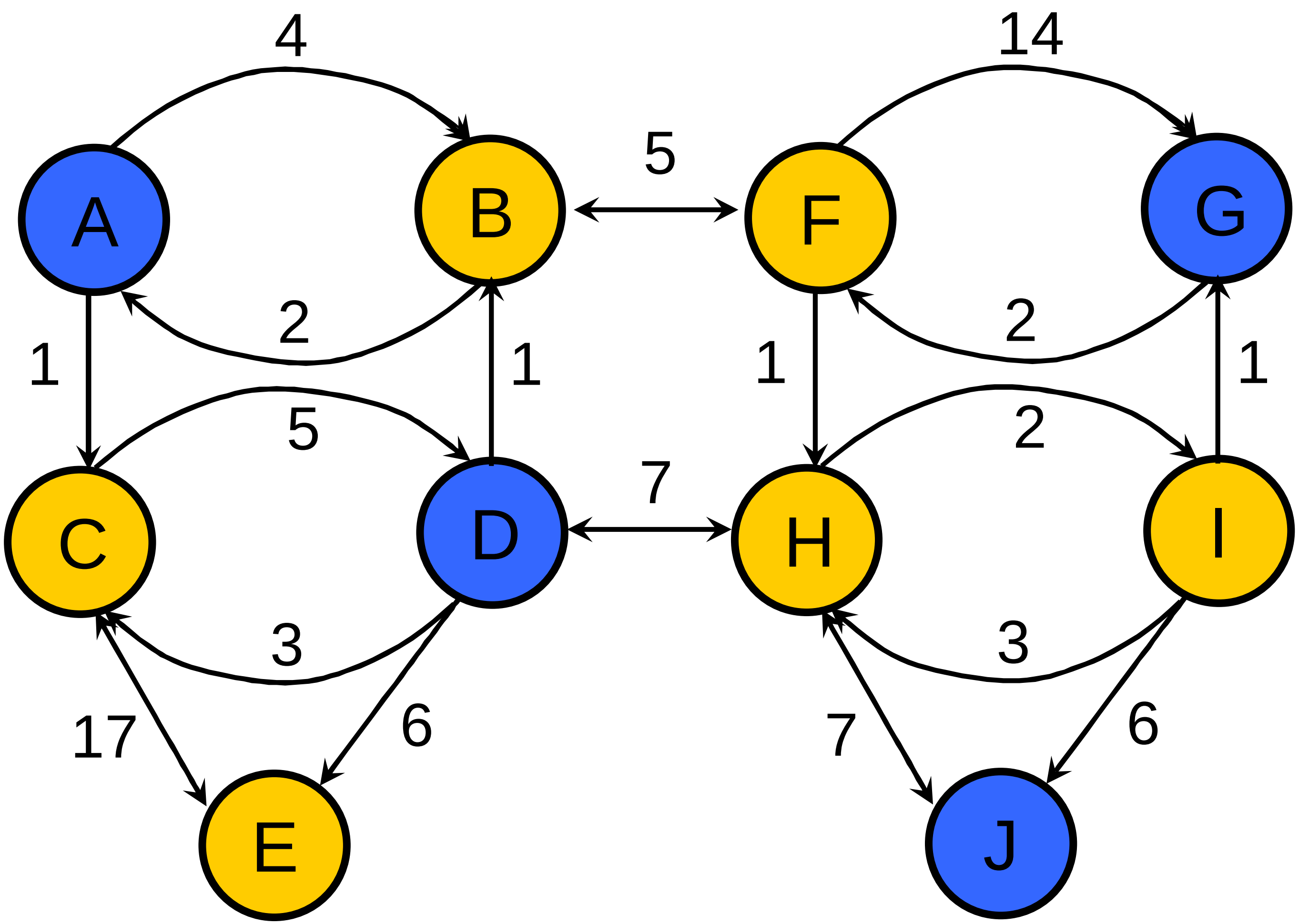
$$2(n-1) + 2(n-2) + \ldots + 2 - (n-1) =$$

$$2\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$$

$$\Rightarrow O\left(n^{2}\right)$$

Problema do caixeiro viajante

- Encontre o menor ciclo iniciando e terminando em um mesmo nó O, visitando cada nó do ciclo, A, B, C, etc. ao menos uma vez.



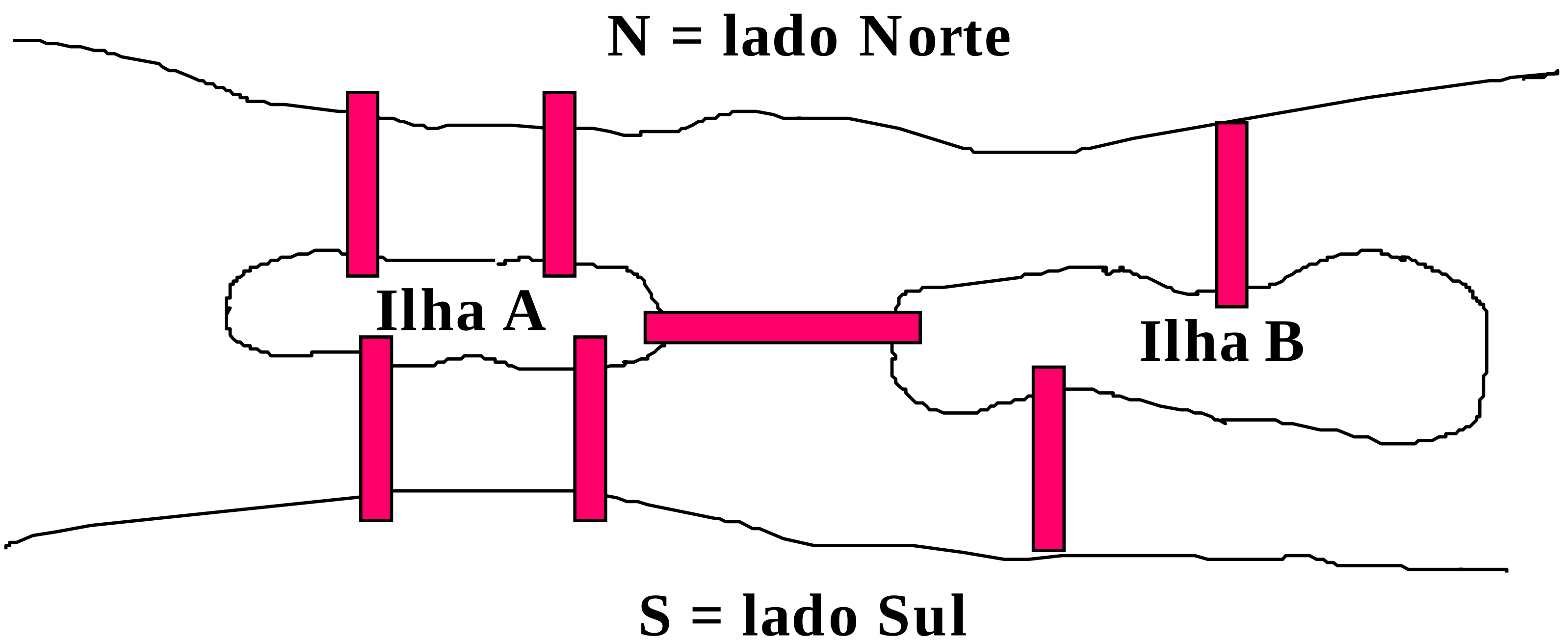
Exemplo do problema do caixeiro viajante:
construa um ciclo ótimo conectando os nós azuis

Problema do carteiro chinês

- Encontre o circuito ou ciclo de menor comprimento que “cubra” cada arco ao menos uma vez.

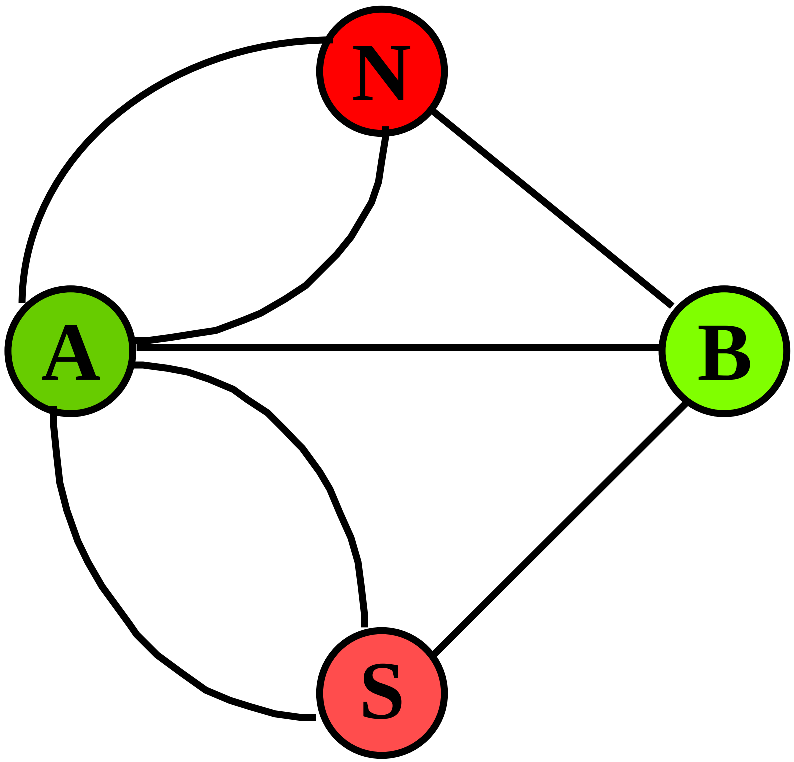
Um problema famoso

As 7 pontes de Konigsberg

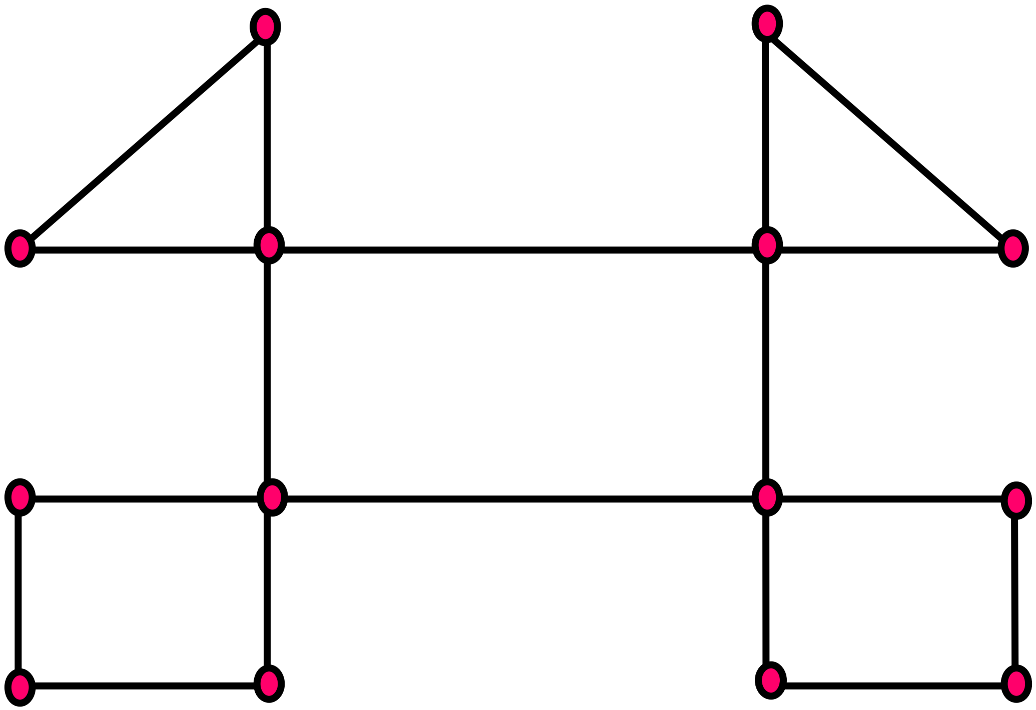


Reduzido a uma rede

As sete pontes de Konigsberg representadas em forma de rede

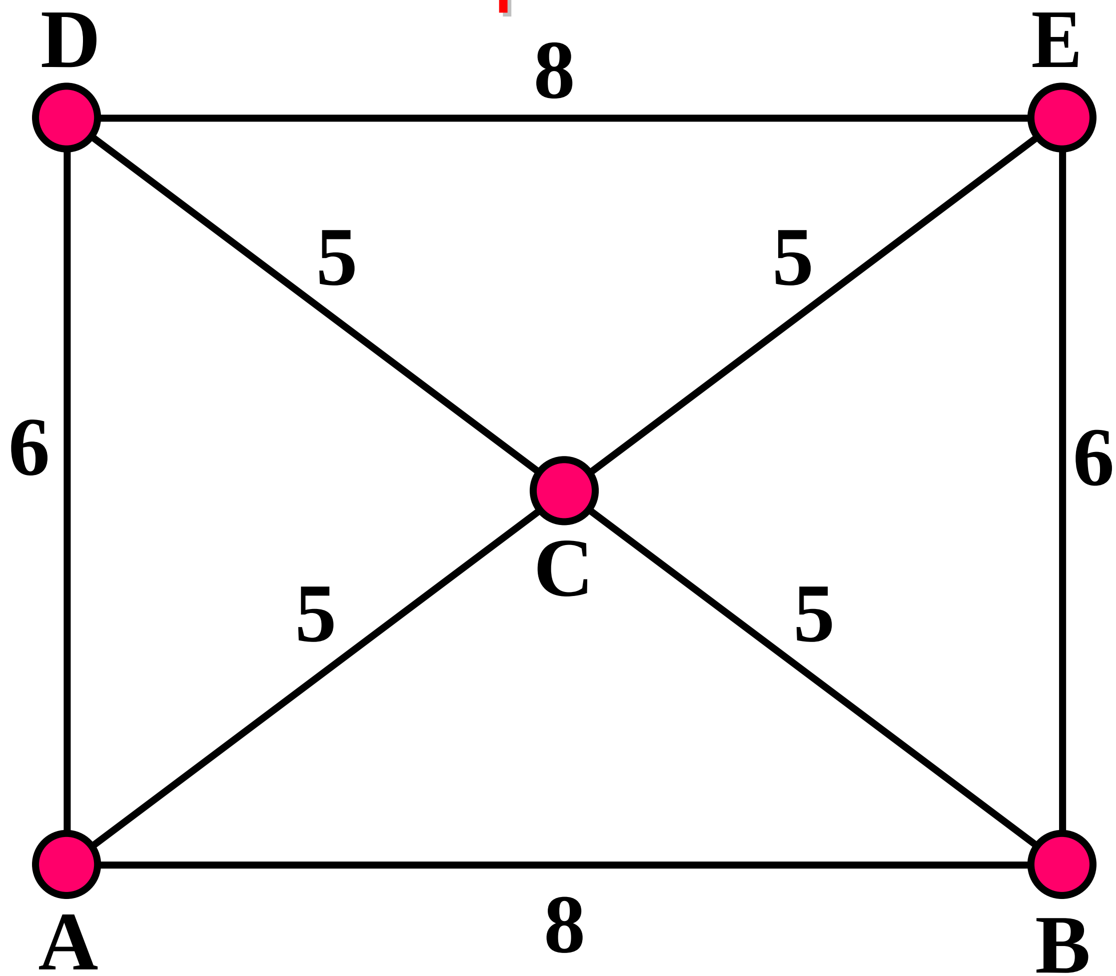


Problema do carteiro chinês

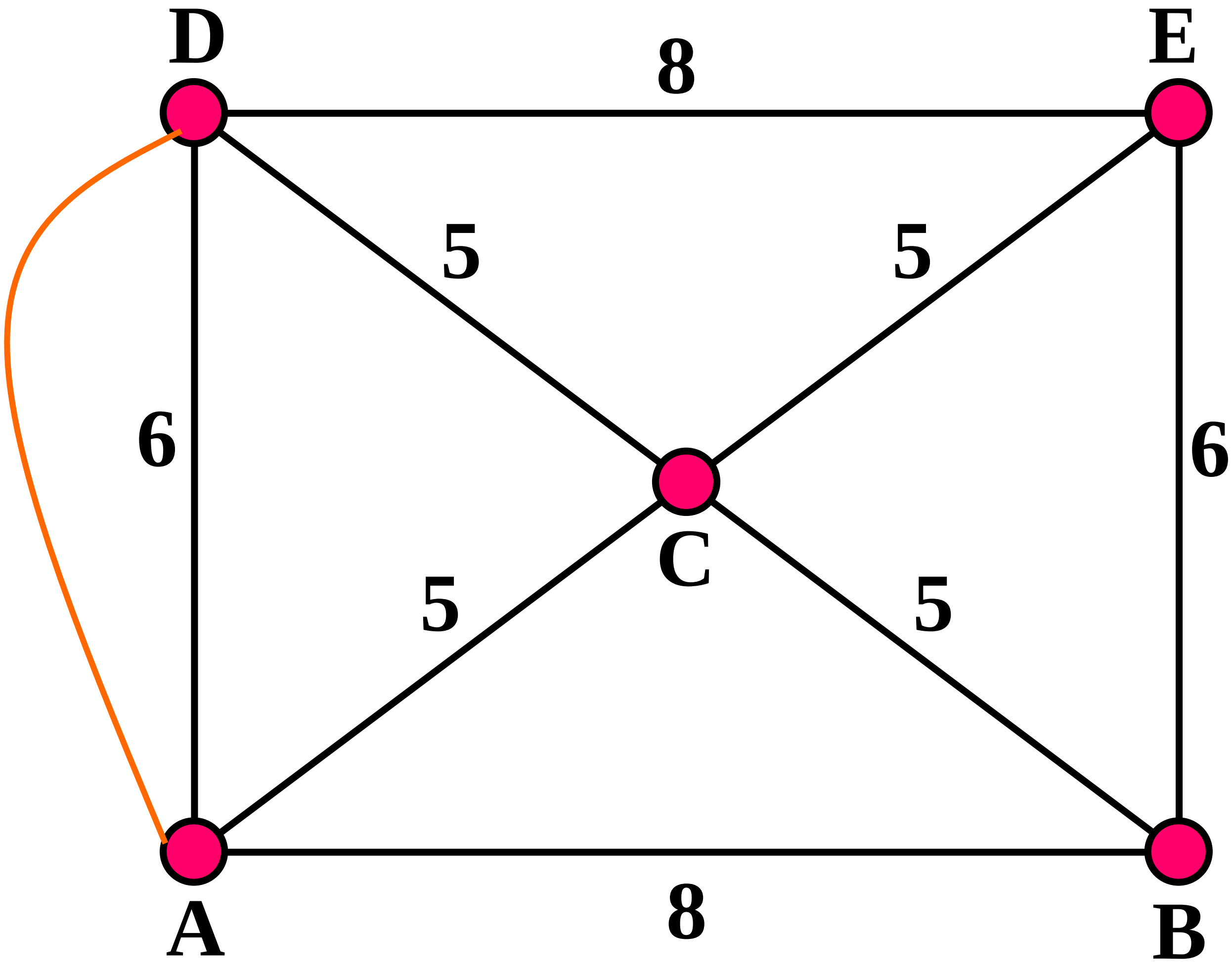


Um problema simples do carteiro chinês

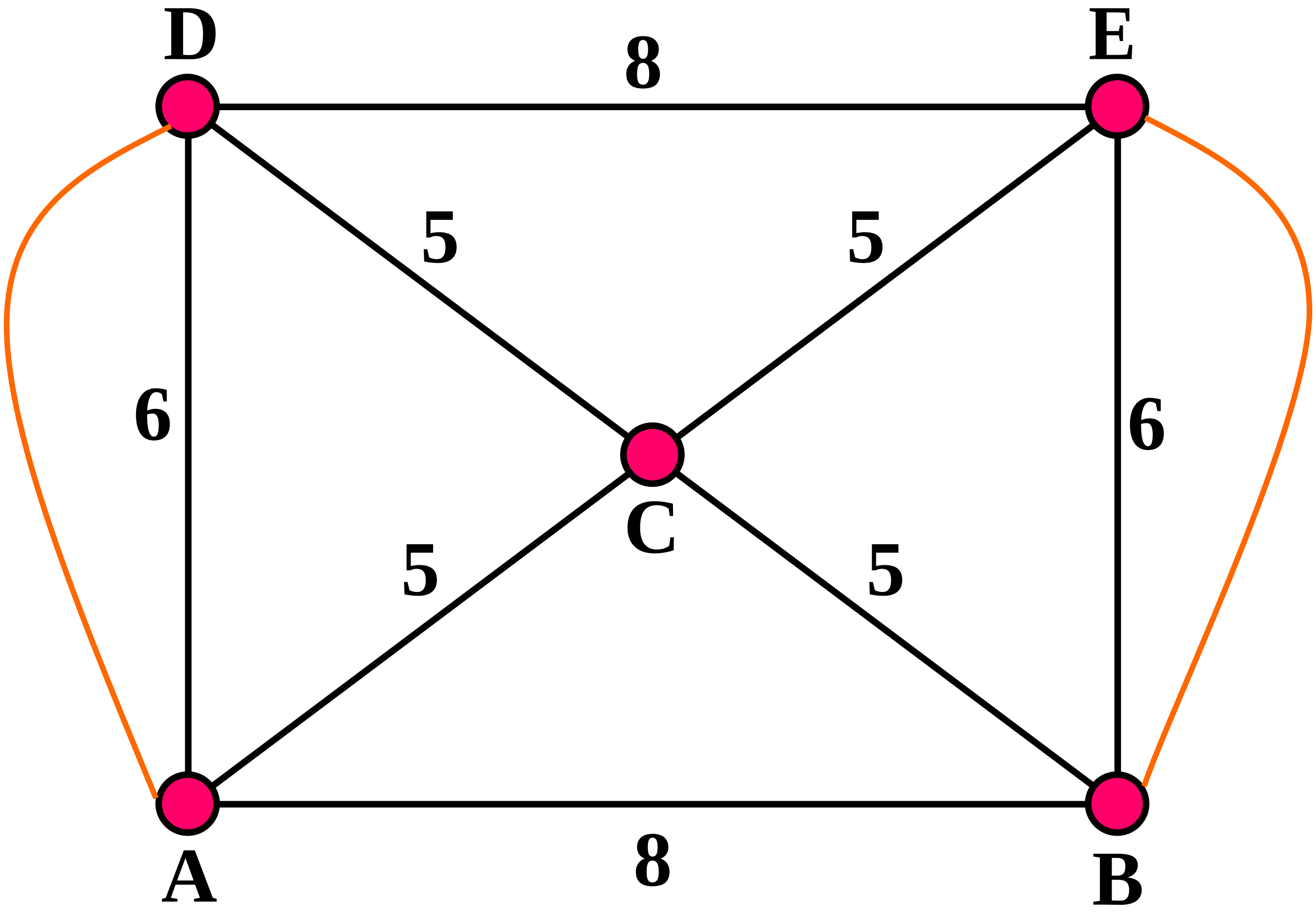
Problema do carteiro chinês: acoplamento

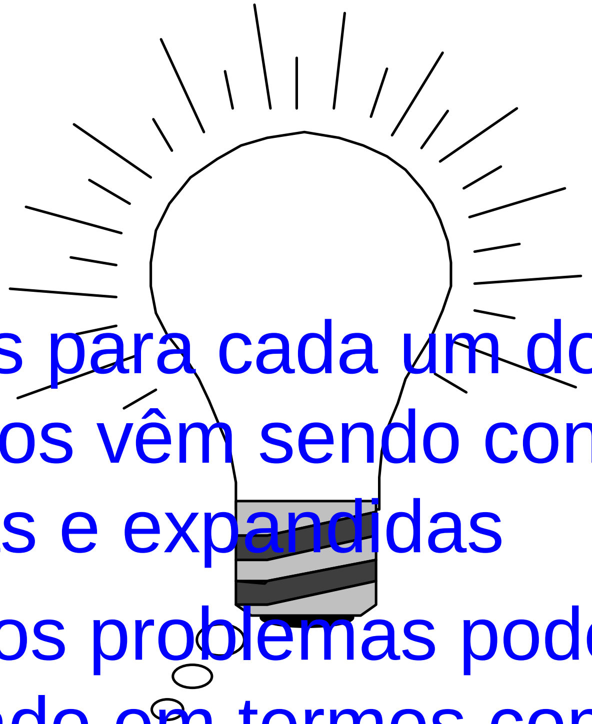


Acoplamento nº 2



Acoplamento nº 3





- As soluções para cada um dos problemas apresentados vêm sendo constantemente aprimoradas e expandidas
- Cada um dos problemas pode ser implementado em termos computacionais, em ambientes operacionais complexos
- O correio, FEDEX, empresas de transporte, serviços de “courier” fazem uso destas técnicas