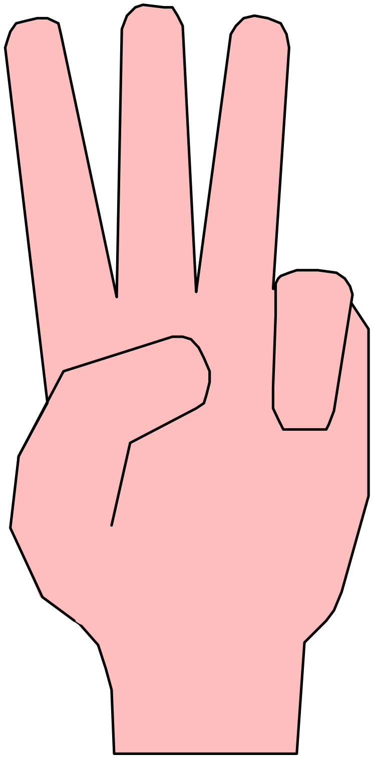
Localização ótima de facilidades em uma rede

Uma Segunda Aplicação da
Análise de Redes de Transportes

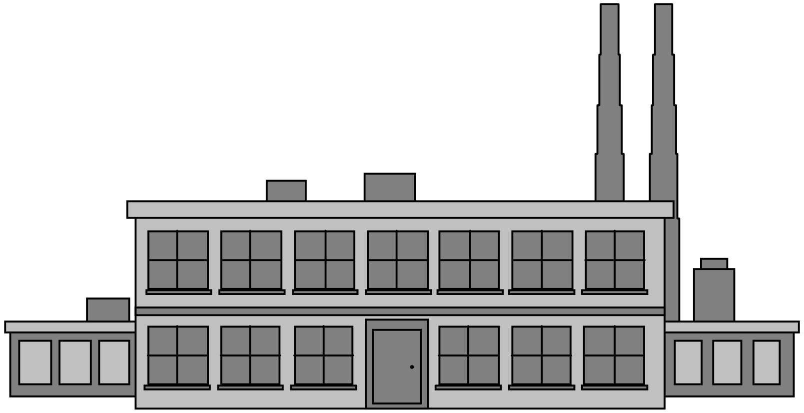
Existem **Três** fatores importantes na hora de comprar uma casa:



- Localização
- Localização
- Localização

Exemplos:

- Bibliotecas
- Ambulâncias
- Depósitos
- Indústrias
- Restaurantes
- Bancos
- Centrais telefônicas
- Instalações militares



Funções objetivo:

- Minimizar o tempo médio ou distância média de viagem
- Minimizar o tempo máximo ou distância máxima de viagem (pior caso)
- Minimizar a porcentagem da população localizada a mais de 10 minutos de uma facilidade
- Maximizar o tempo mínimo de viagem

Problemas clássicos de localização

- Localização de medianas
  - Minimizar o tempo ou distância média de viagem
  - Conhecido por Minisum
- Localização de centros
  - Minimizar a distância máxima até (ou de) uma facilidade
- Requisitos básicos
  - Alocar para atingir algum objetivo

Localização de medianas

- O peso h_j de um nó representa a porcentagem de clientes do nó j
- A soma dos h_j's é igual a 1.
- Consideramos uma rede não orientada $G(N,A)$
- Objetivo: localizar k facilidades em G de tal forma que a distância média de viagem para a facilidade mais próxima seja minimizada

$$G(N,A),\ |N| = n$$

$$h_j \geq 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} h_j = 1$$

$$\mathbf{X}_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\};\ x_j \in G$$

$d(\mathbf{X}_k, j) \equiv$ Menor distância entre qualquer um dos pontos $x_i \in \mathbf{X}_k$ e o nó j $\in N$

$$d(\mathbf{X}_k, j) \equiv \underset{x_i \in \mathbf{X}_k}{MIN}\ d(x_i, j)$$

$$J(\boldsymbol{X}_k) \equiv \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} h_j\, d(\boldsymbol{X}_k, j) = \text{tempo médio de viagem}$$

para a (ou da) facilidade mais próxima

Determine $\boldsymbol{X}_k^* \in G$ de forma que todos $\boldsymbol{X}_k^* \in G$,

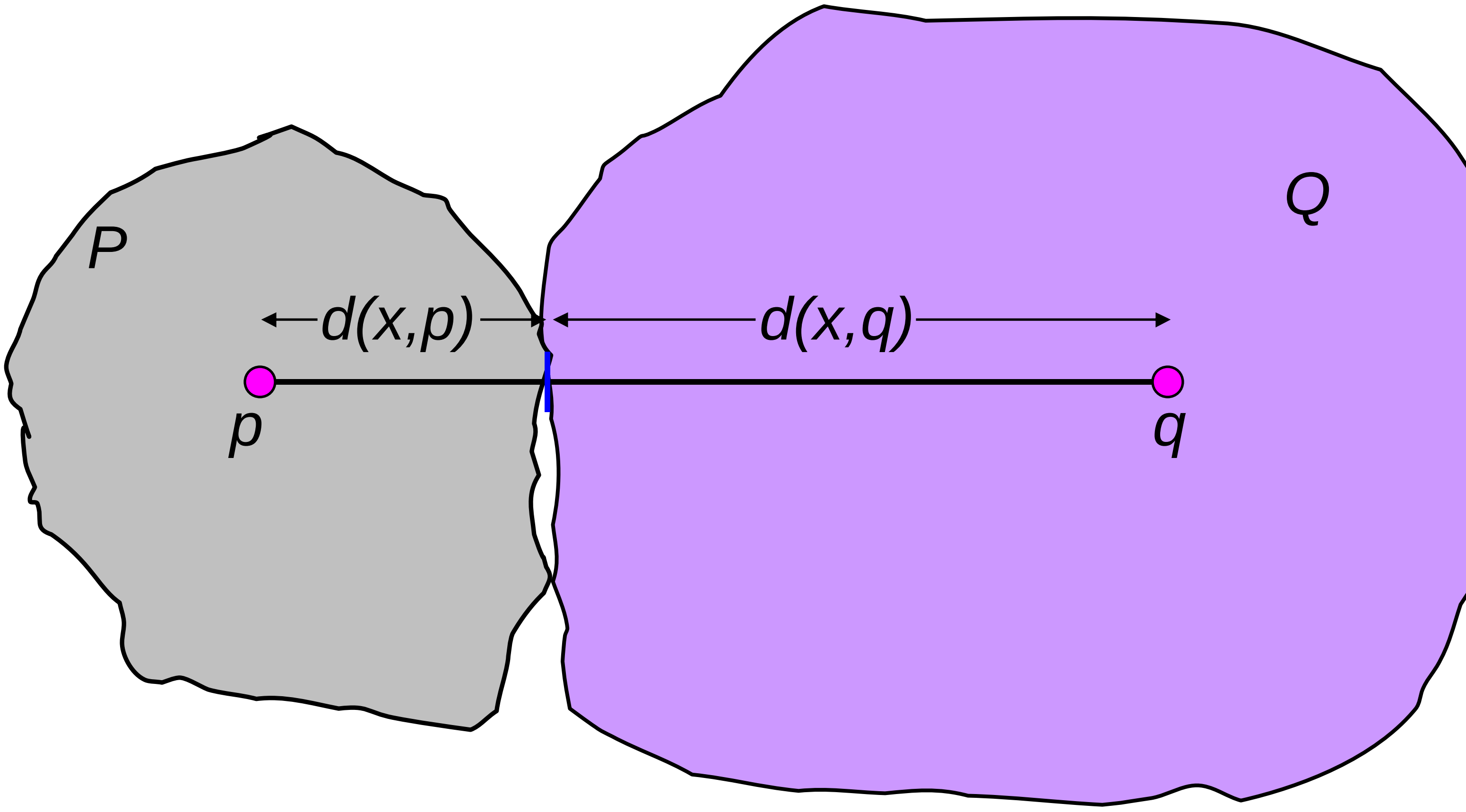
$$J(\boldsymbol{X}_k^*) \leq J(\boldsymbol{X}_k)$$

$\boldsymbol{X}_k^*$ é a k–mediana de $G(N, A)$ para $\vec{h} = \left(h_1, h_2, \ldots, h_n\right)$

Teorema

- Existe no mínimo uma k-mediana nos nós de G.

Prova por contradição para *k*=1



Prova

- Inicie com um problema de 2 nós, $w_p > w_q$

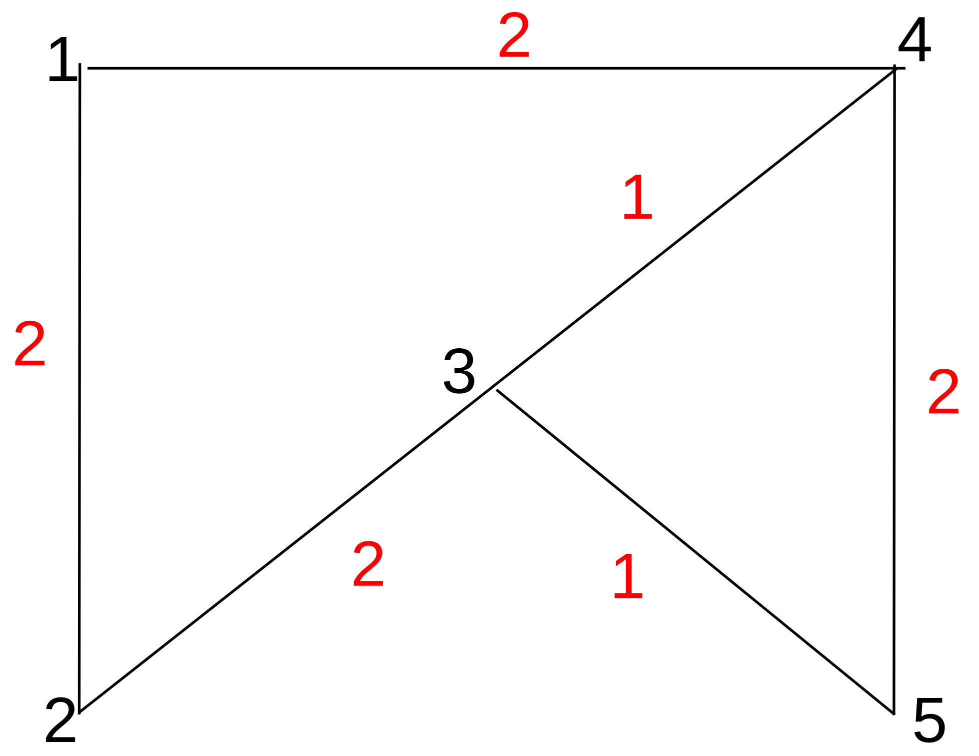
$$J(x) = w_p x + (1 - w_p)(1 - x)$$

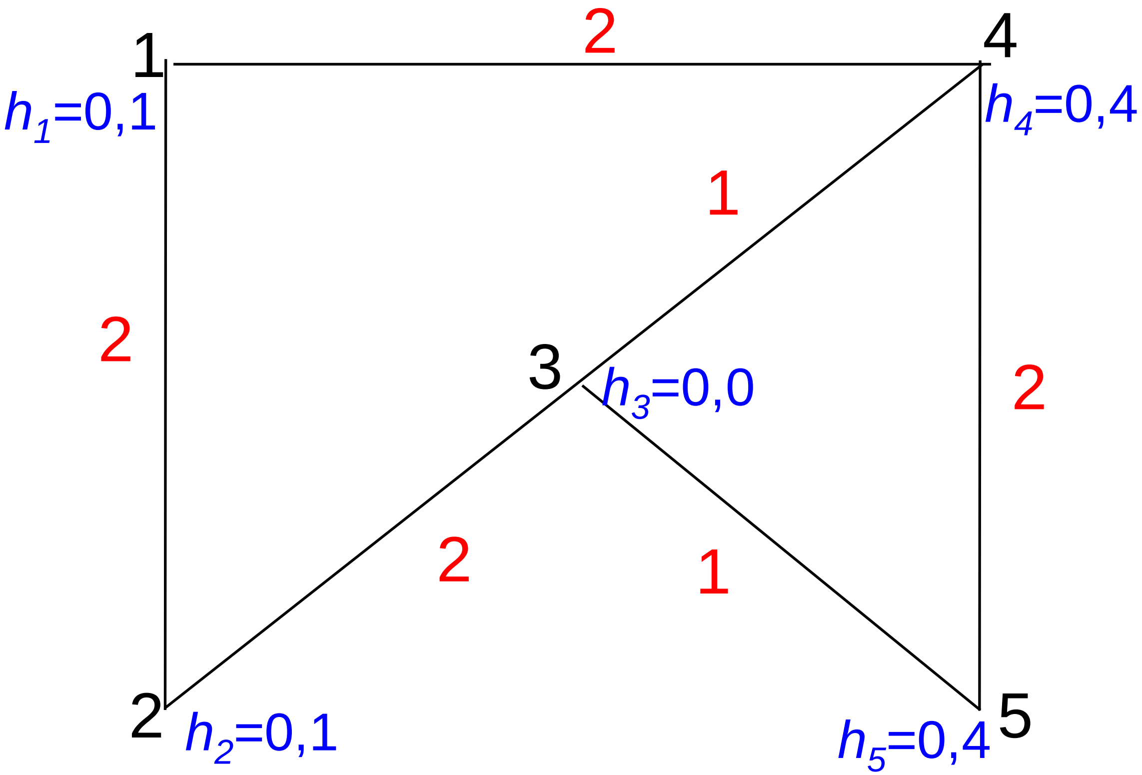
$$= 2w_p x + 1 - x - w_p$$

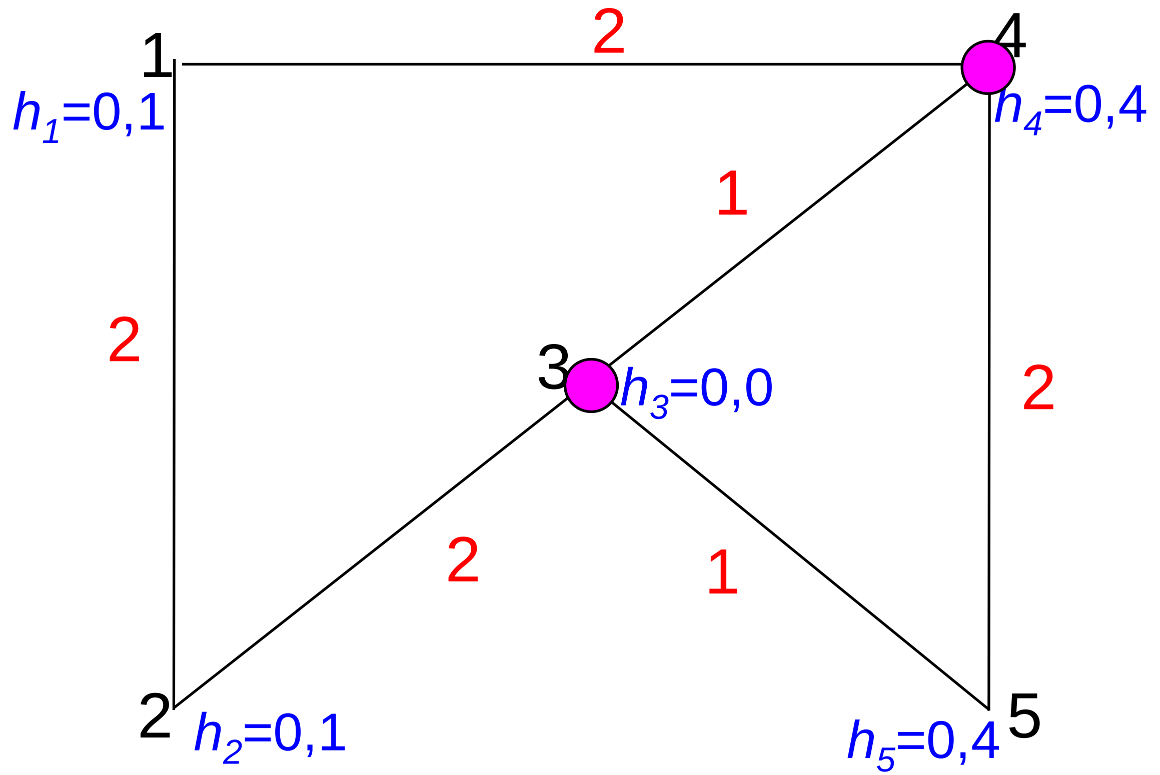
$$= x(2w_p - 1) + 1 - w_p$$

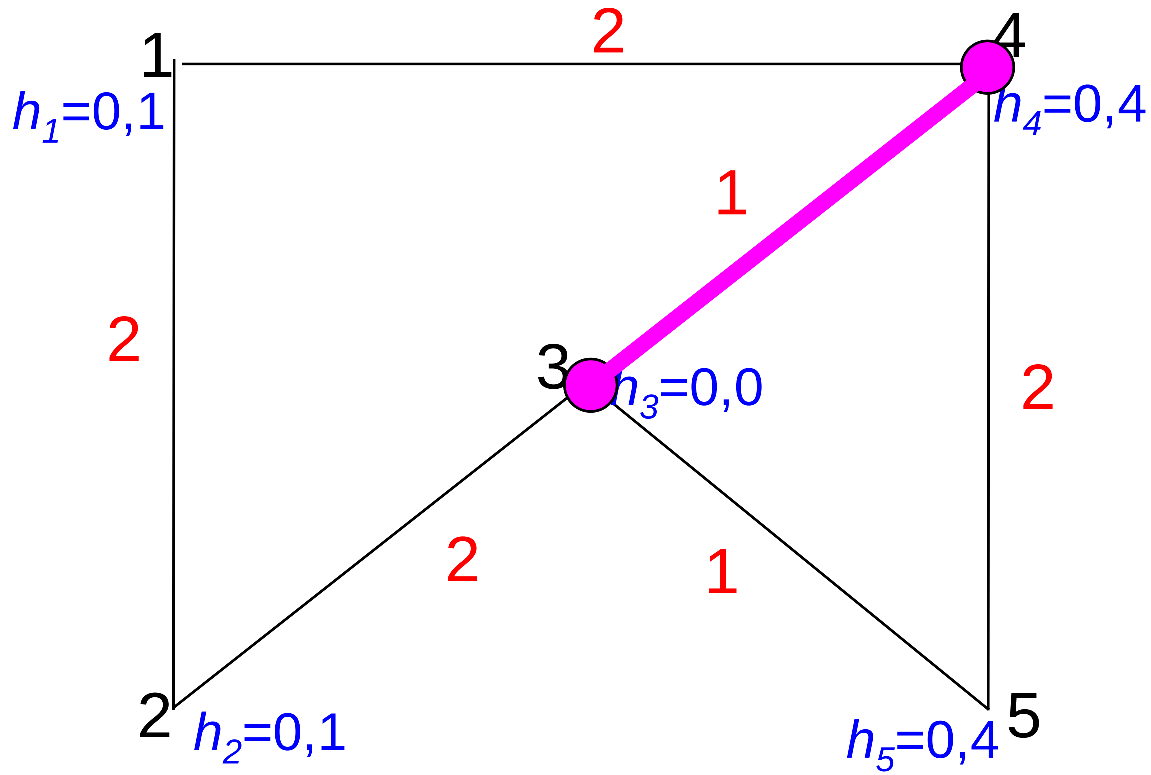
Prova - continuação

- Desenhe isto graficamente
- adicione uma rede genérica com múltiplos nós
- Adicione pontos de mudança


1
2
4
1
2
3
2
2
1
2
5


1
2
4
h_1=0,1
h_4=0,4
1
2
3
h_3=0,0
2
2
1
2
h_2=0,1
h_5=0,4
5


1
2
4
h1=0,1
h4=0,4
1
2
3
h3=0,0
2
2
1
2
h2=0,1
h5=0,4
5



1
h_1=0,1
2
h_2=0,1
3
h_3=0,0
4
h_4=0,4
5
h_5=0,4
2
1
2
2
1
2

Resumo para 1-Mediana

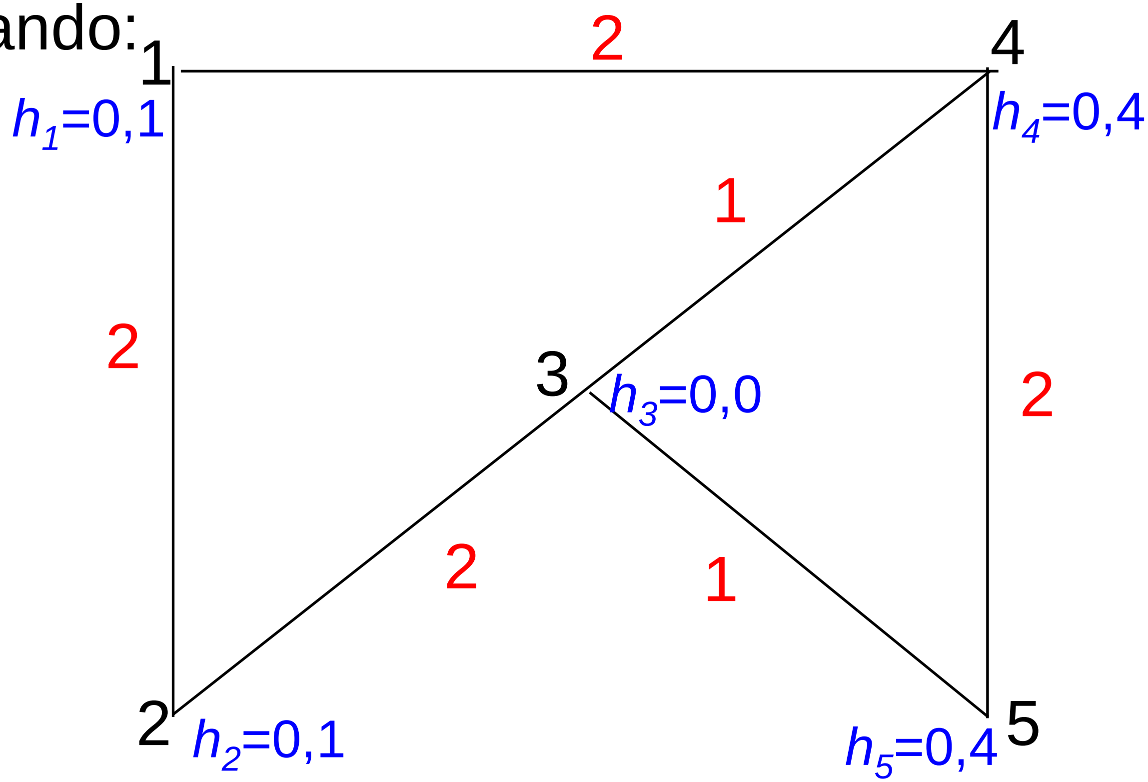
- Passo 1: determine a matriz de distâncias D
- Passo 2: Determine $(h_j, d(i,j))$
- Passo 3: Determine a soma das linhas de $(h_j, d(i,j))$
  - Escolha a menor soma (minisum)

Localização de centros

G(N,A), não orientado

Localizar uma facilidade de forma a minimizar a distância máxima para um nó

Relembrando:



$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nós 2, 3 e 4 são nós centrais

Localização de centros

- Em geral, o centro absoluto não é uma solução nodal, mas o nó central é.

Seja $x \in G(N, A)$

Defina a “função de distância máxima”:

$$m(x) \equiv \underset{j \in N}{MAX} [d(x_i, j)]$$

Objetivo para o centro absoluto

Encontrar $x^* \in G$ de forma que $m(x^*) \leq m(x)$ para todos $x \in G$

Algoritmo: um único centro absoluto

1. Encontre todos os centros locais (um para cada arco)
2. Escolha um centro local com o menor $m(x_l)$. Este é um centro absoluto x^* de G.