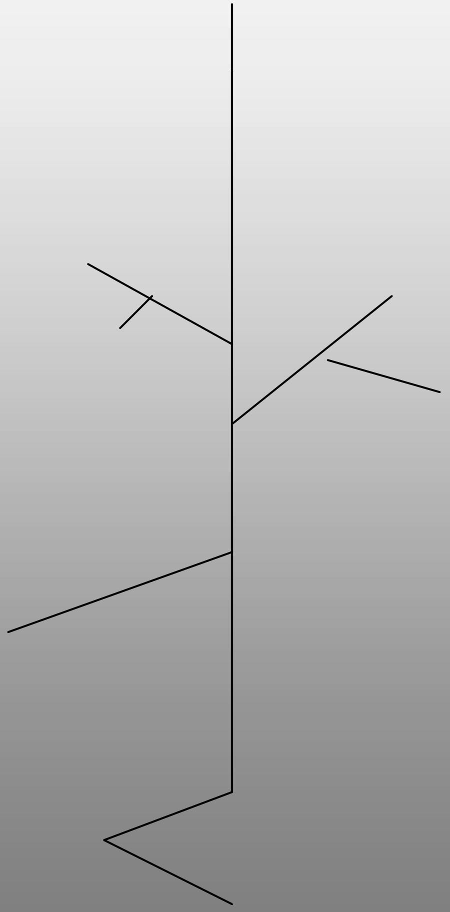
Problemas de Localização II

Métodos de Logística e
Planejamento de Transportes

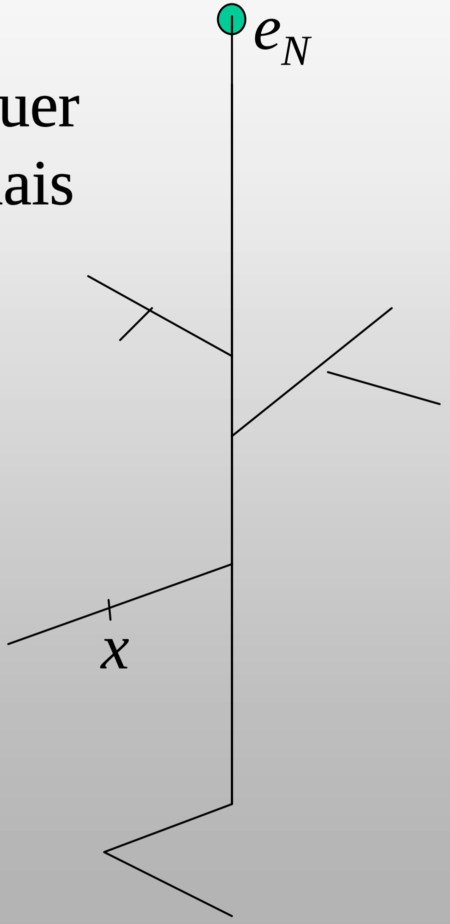
Localização do centro de uma única árvore



G é uma árvore.
e_i, $i = 1, 2, ..., m$
são vértices da árvore.

Localização do centro de uma única árvore

<u>Passo 1:</u> Escolha qualquer $x \in G$, digamos, e_N, o mais distante possível de x.

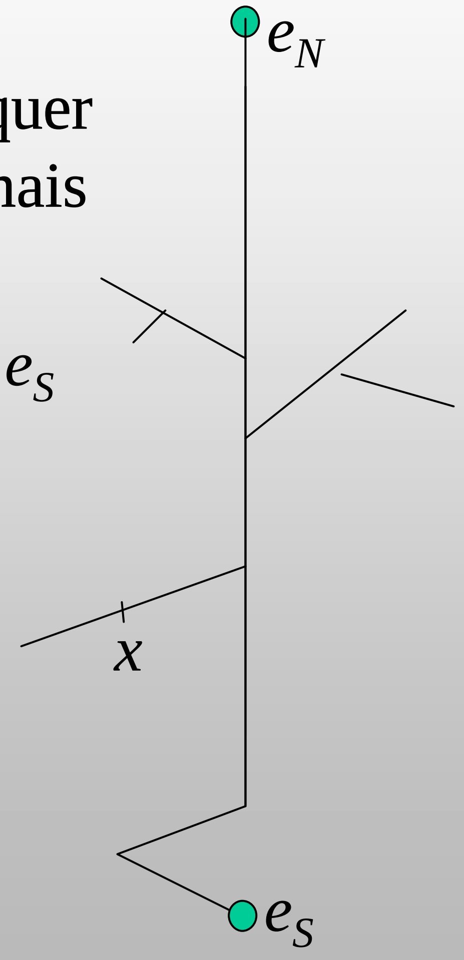


G é uma árvore.
e_i, $i = 1, 2, ..., m$
são vértices da árvore.

Localização do centro de uma única árvore

Passo 1: Escolha qualquer $x \in G$, digamos, e_N, o mais distante possível de x.

Passo 2: Escolha o nó e_S mais distante de e_N.



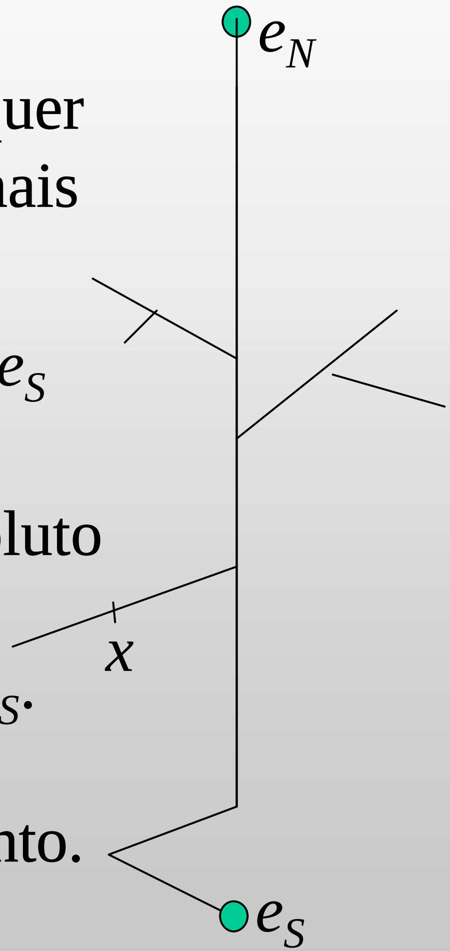
G é uma árvore.
e_i, $i = 1, 2, ..., m$
são vértices da árvore.

Localização do centro de uma única árvore

<u>Passo 1:</u> Escolha qualquer $x \in G$, digamos, e_N, o mais distante possível de x.

<u>Passo 2:</u> Escolha o nó e_S mais distante de $e_{N.}$

<u>Passo 3:</u> O centro absoluto de G é o ponto médio do caminho entre e_N e e_S. O nó central é o vértice mais próximo a este ponto.



G é uma árvore.
e_i, $i = 1, 2, ..., m$
são vértices da árvore.

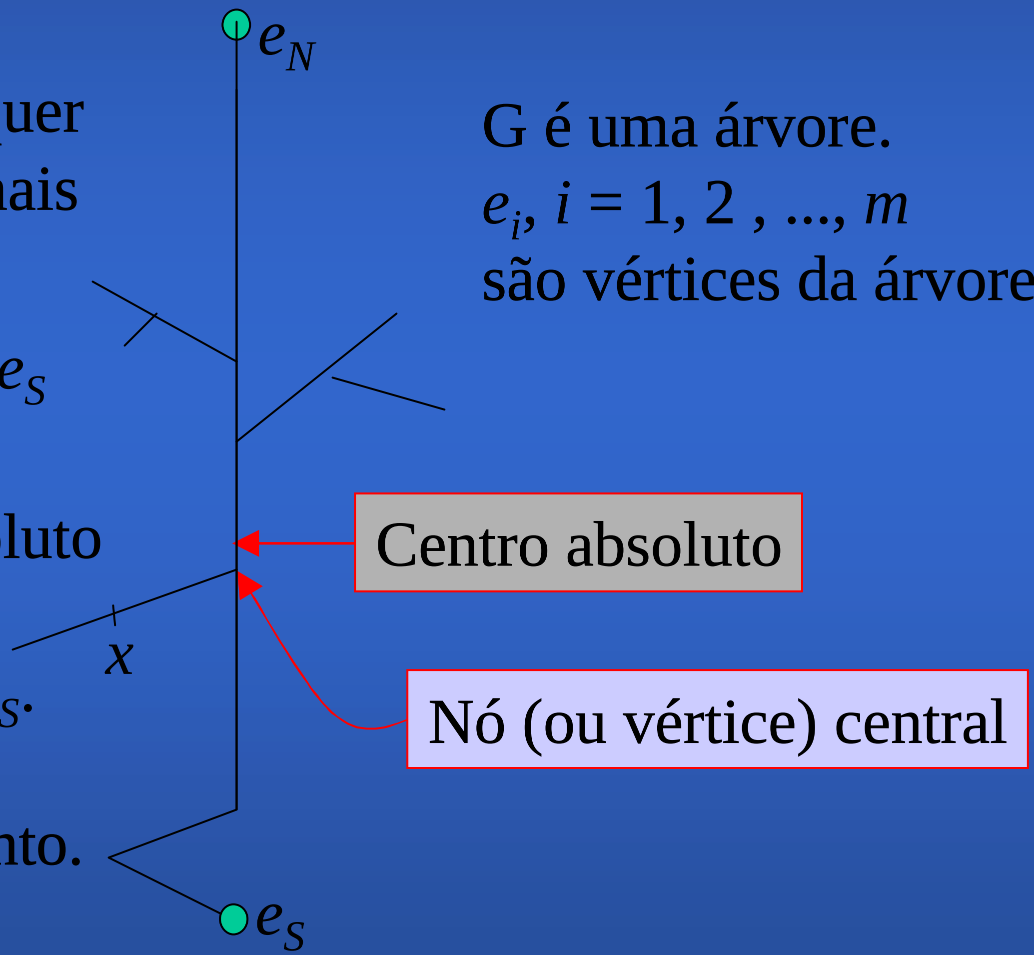
Localização do centro de uma única árvore

Passo 1: Escolha qualquer $x \in G$, digamos, e_N, o mais distante possível de x.

G é uma árvore.
e_i, $i = 1, 2, \ldots, m$
são vértices da árvore.

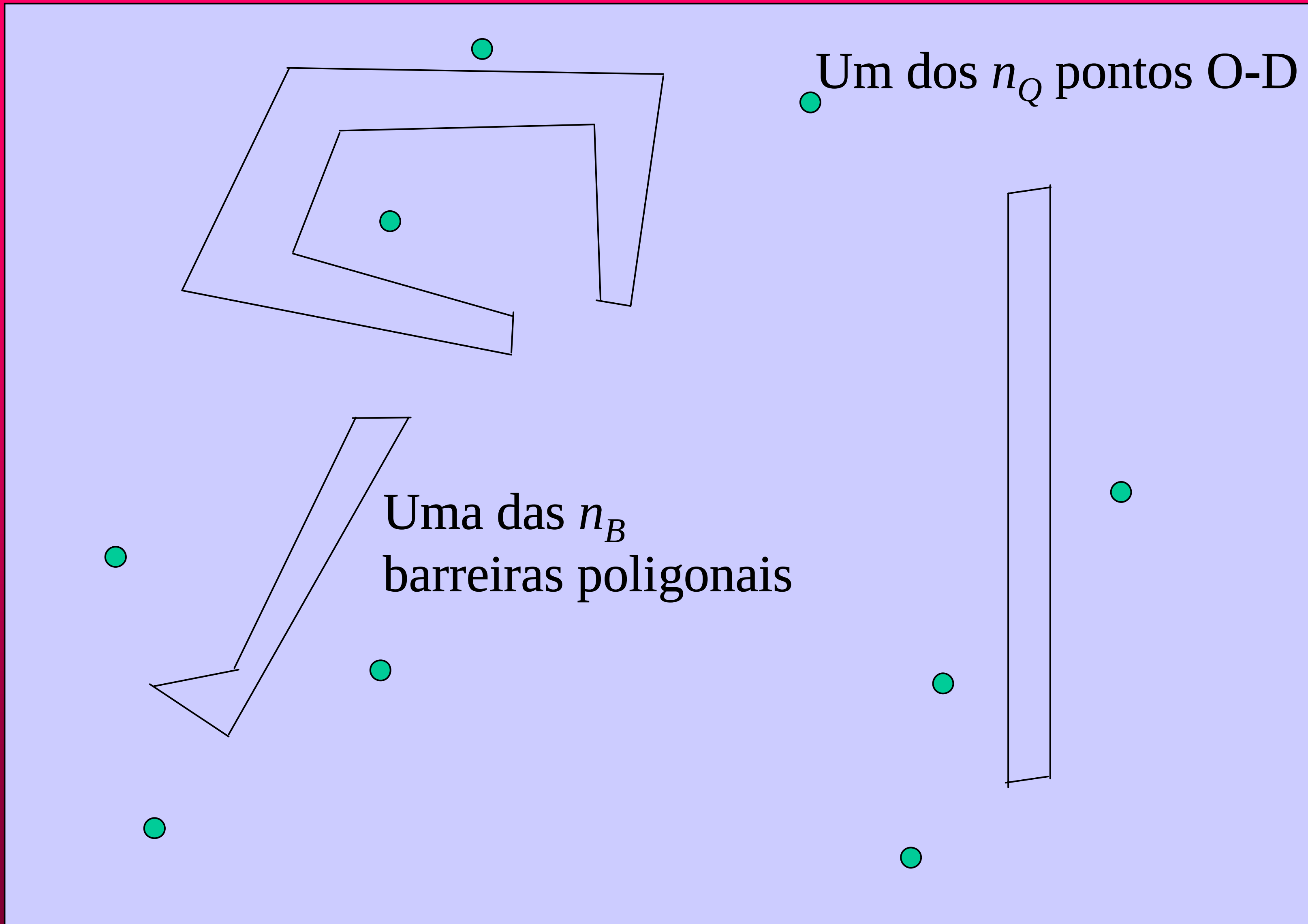
Passo 2: Escolha o nó e_S mais distante de e_N.

Passo 3: O centro absoluto de G é o ponto médio do caminho entre e_N e e_S.
O nó central é o vértice mais próximo a este ponto.

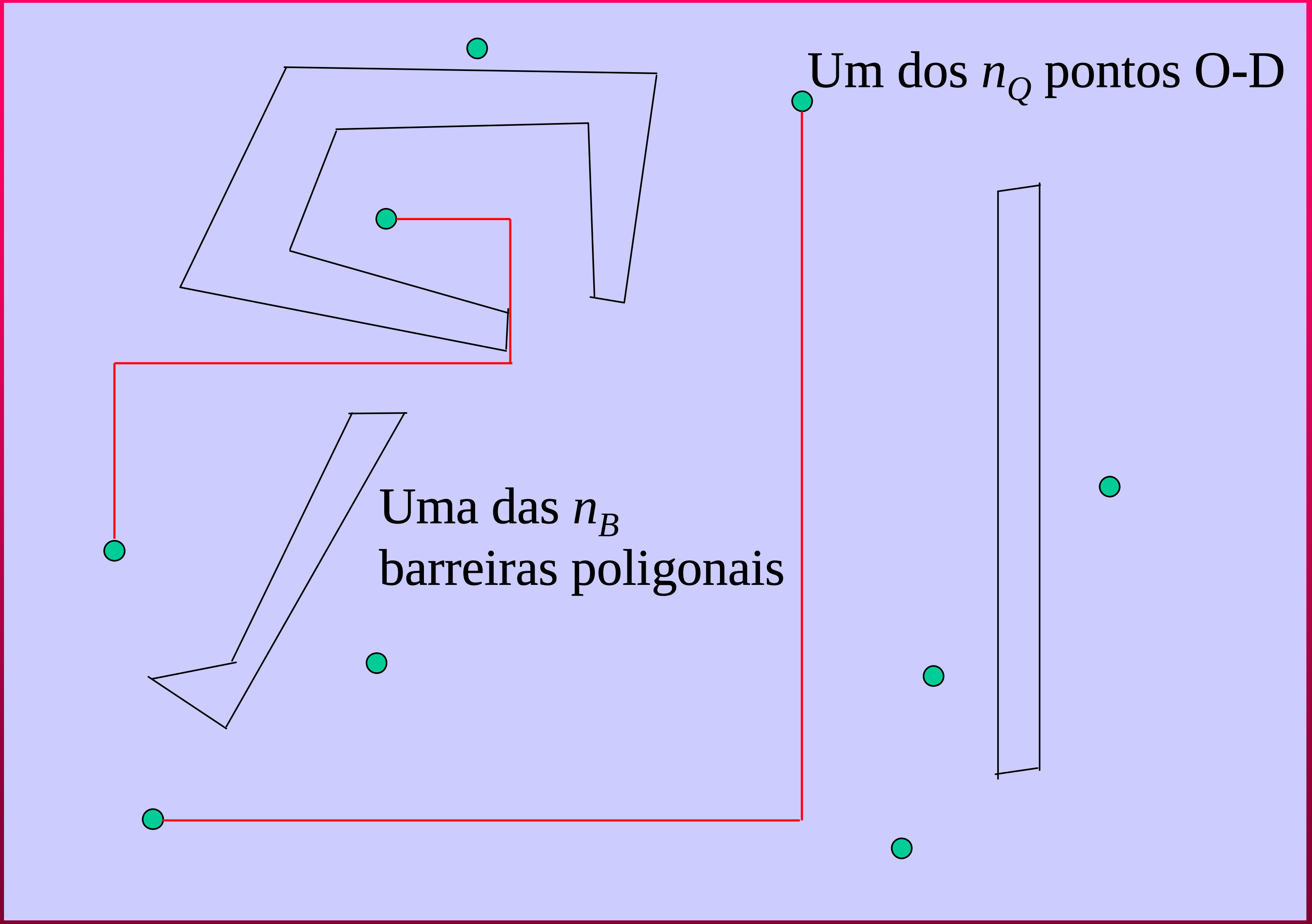


Menor Distância Retangular
Caminhos na Presença de Barreiras

Larson, Li, *Redes*



Um dos n_Q pontos O-D
Uma das n_B
barreiras poligonais


Um dos n_Q pontos O-D
Uma das n_B
barreiras poligonais

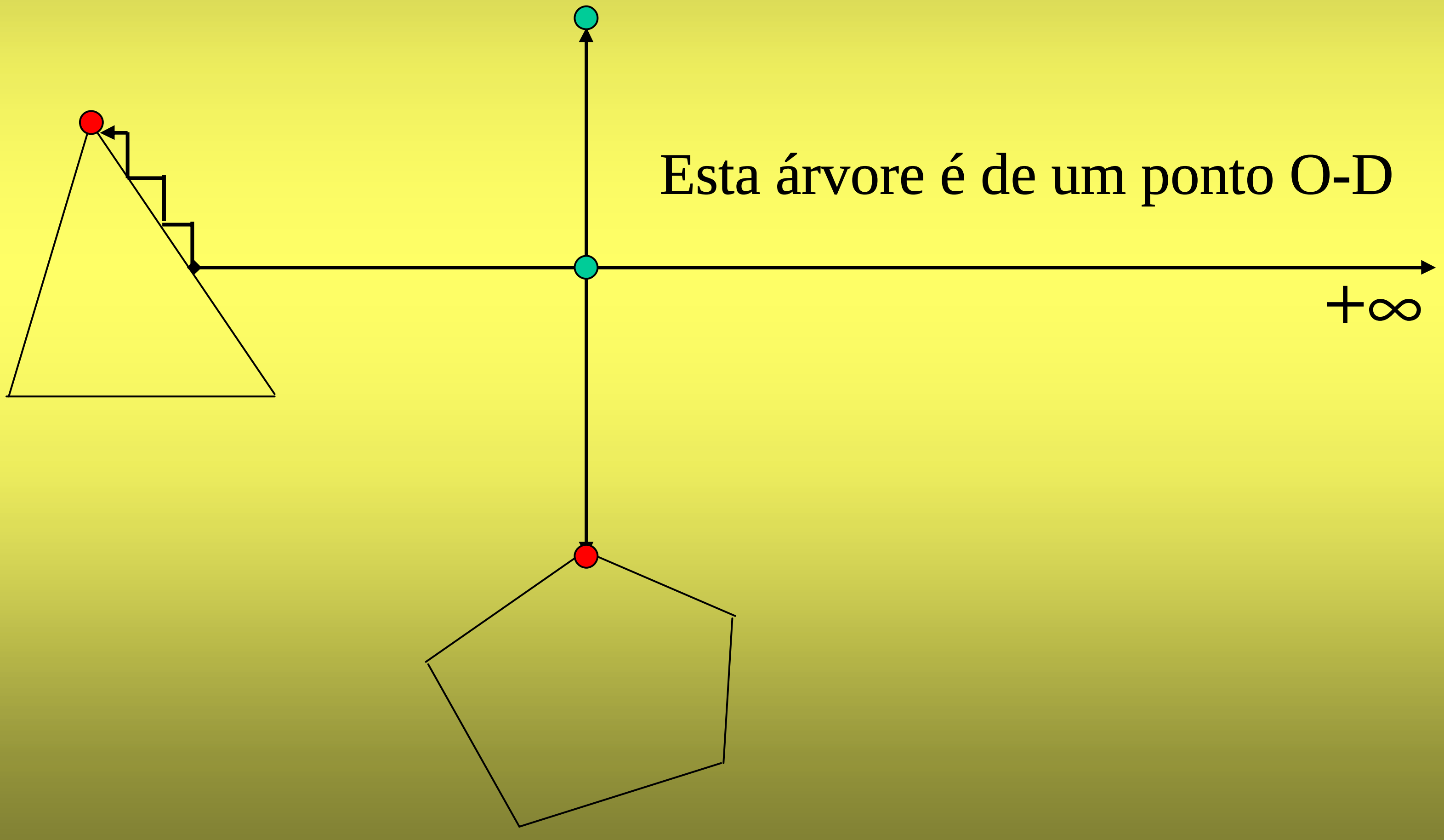
Comunicação: O nome do jogo!

- Dois pontos de coordenadas (x, y) e (u, v) COMUNICAM-SE caso exista no mínimo um possível caminho em forma de escada (métrica retangular) entre eles.
- Este caminho em forma de escada possui a menor distância métrica possível:

$$L[(x,y),(u,v)] = |x-u| + |y-v|$$

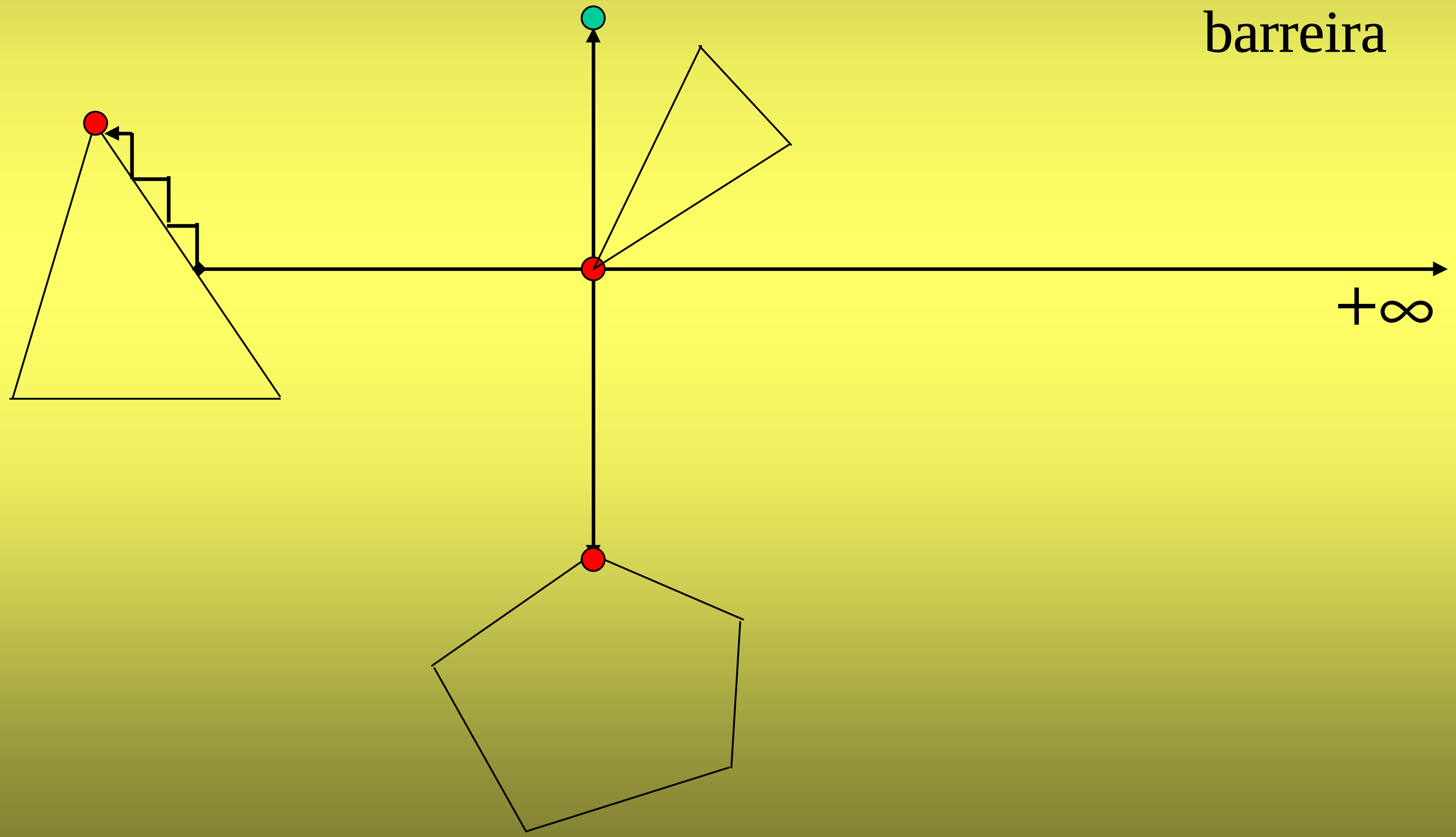
- Por exemplo, quaisquer 2 vértices adjacentes de uma barreira comunicam-se

Árvore de busca de vértices



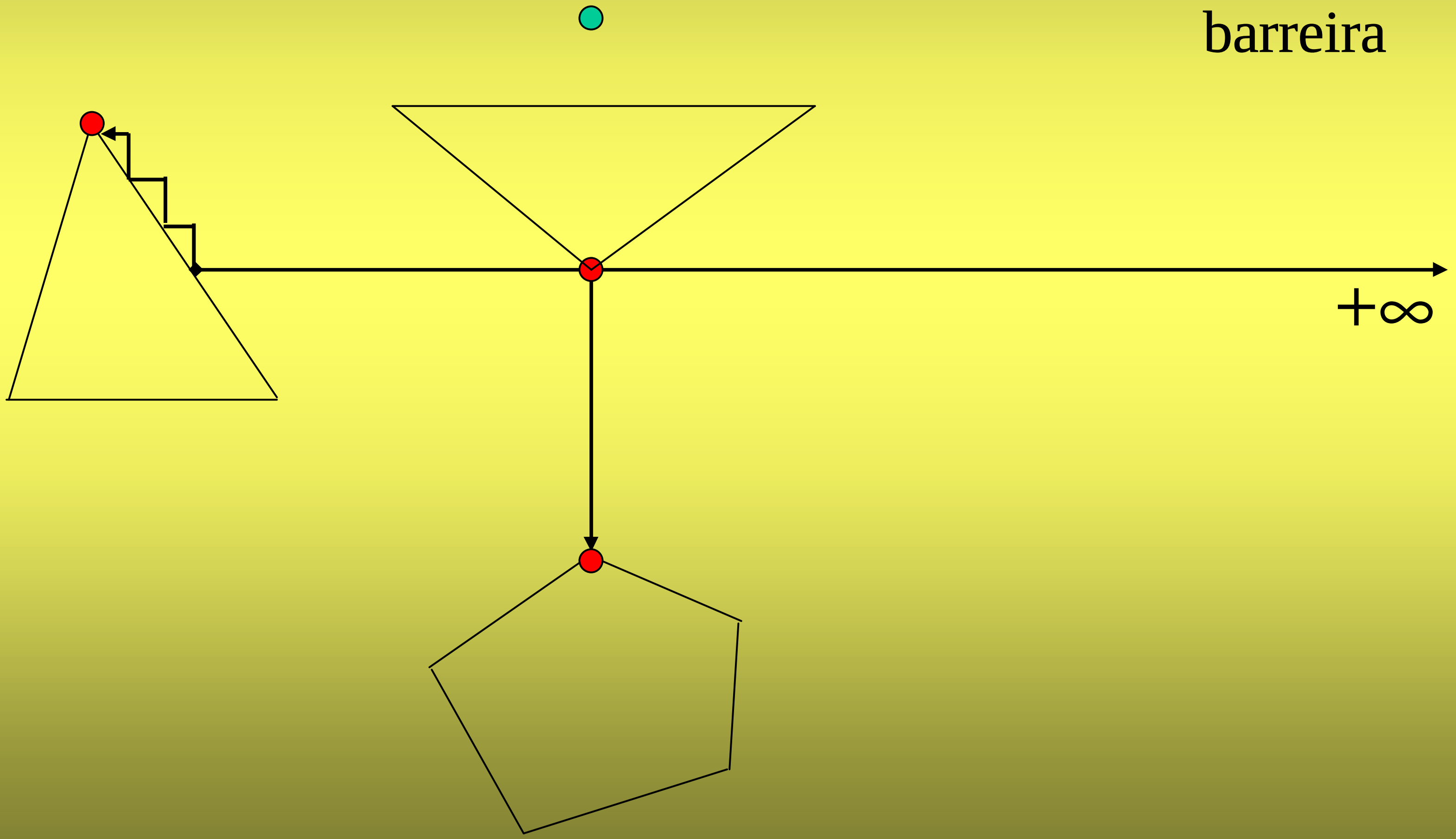
Árvore de busca de vértices

Esta árvore é de um vértice da barreira



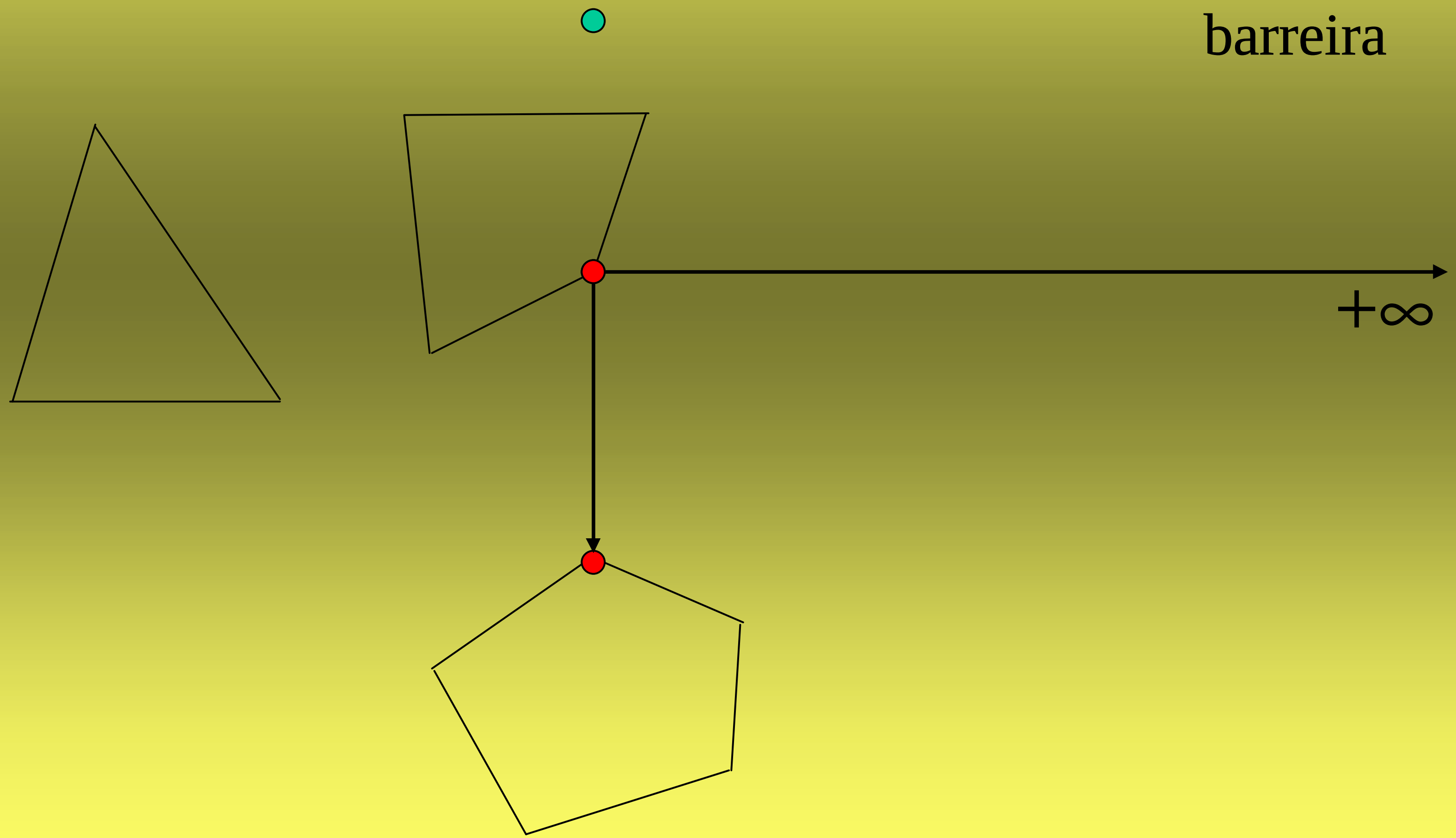
Árvore de busca de vértices

Esta árvore é de um vértice da barreira



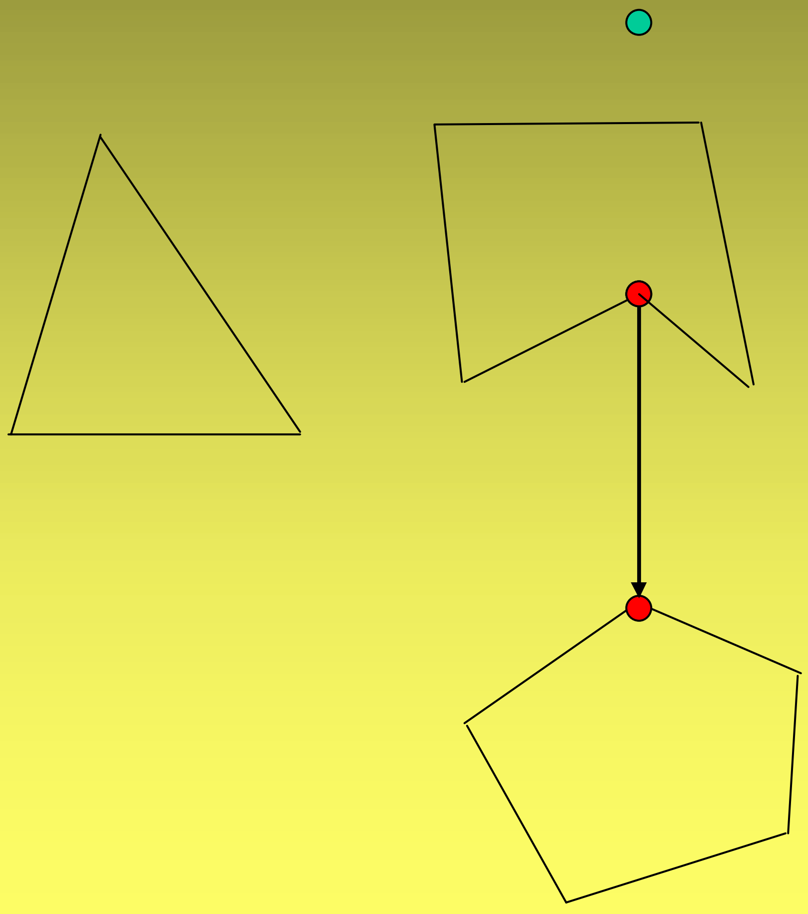
Árvore de busca de vértices

Esta árvore é de um vértice da barreira



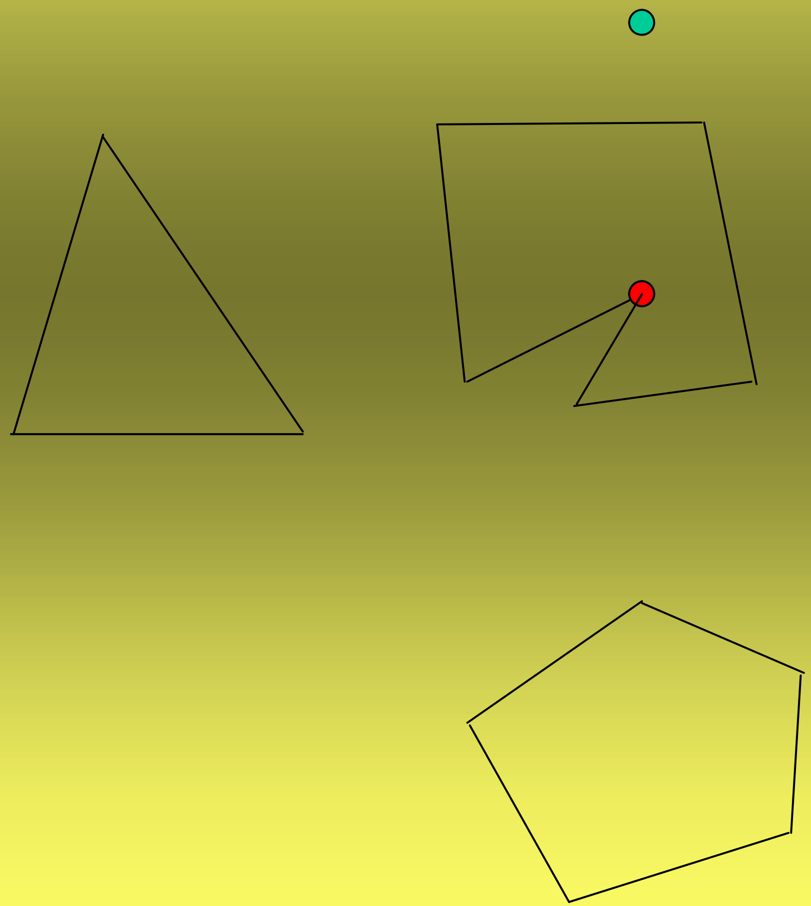
Árvore de busca de vértices

Esta árvore é de um vértice da barreira



Árvore de busca de vértices

Esta árvore é de um vértice da barreira



A comunicação entre 2 nós é simples se

- eles forem vértices adjacentes de uma barreira
- um deles for o nó raiz (inicial) e o outro for o nó terminal (final) de uma árvore de busca de vértices
- eles tenham *x* e *y* sondas (“probes”) que compartilhem no mínimo um ponto *b* não nodal.

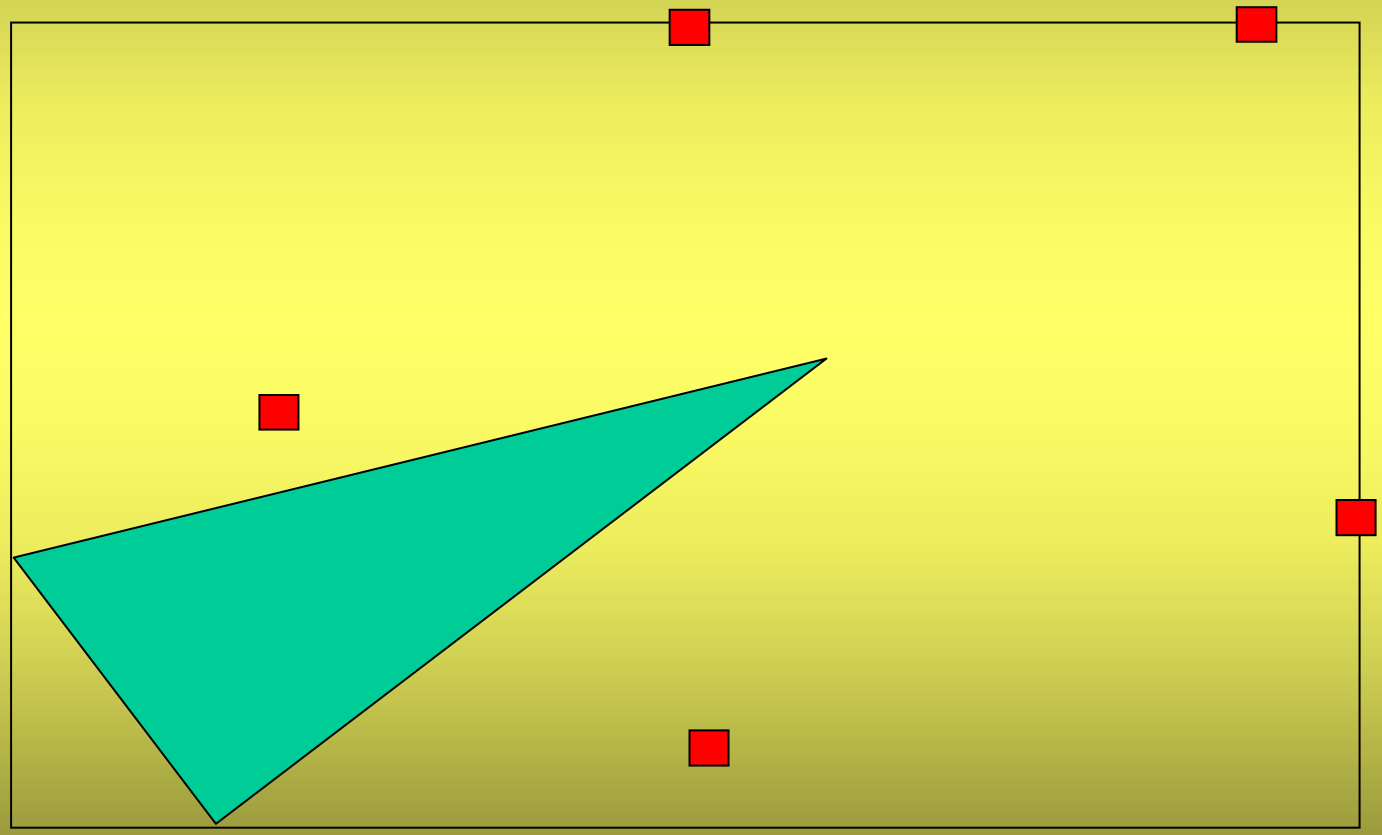
Teorema 1

- Suponha que 2 pontos comunicam-se mas não de forma simples. Neste caso, existe entre os pontos pelo menos um caminho em formato de escada que contém uma sequência de nós que comunicam-se de forma simples.
- Use 'path push and amalgamation' como prova.

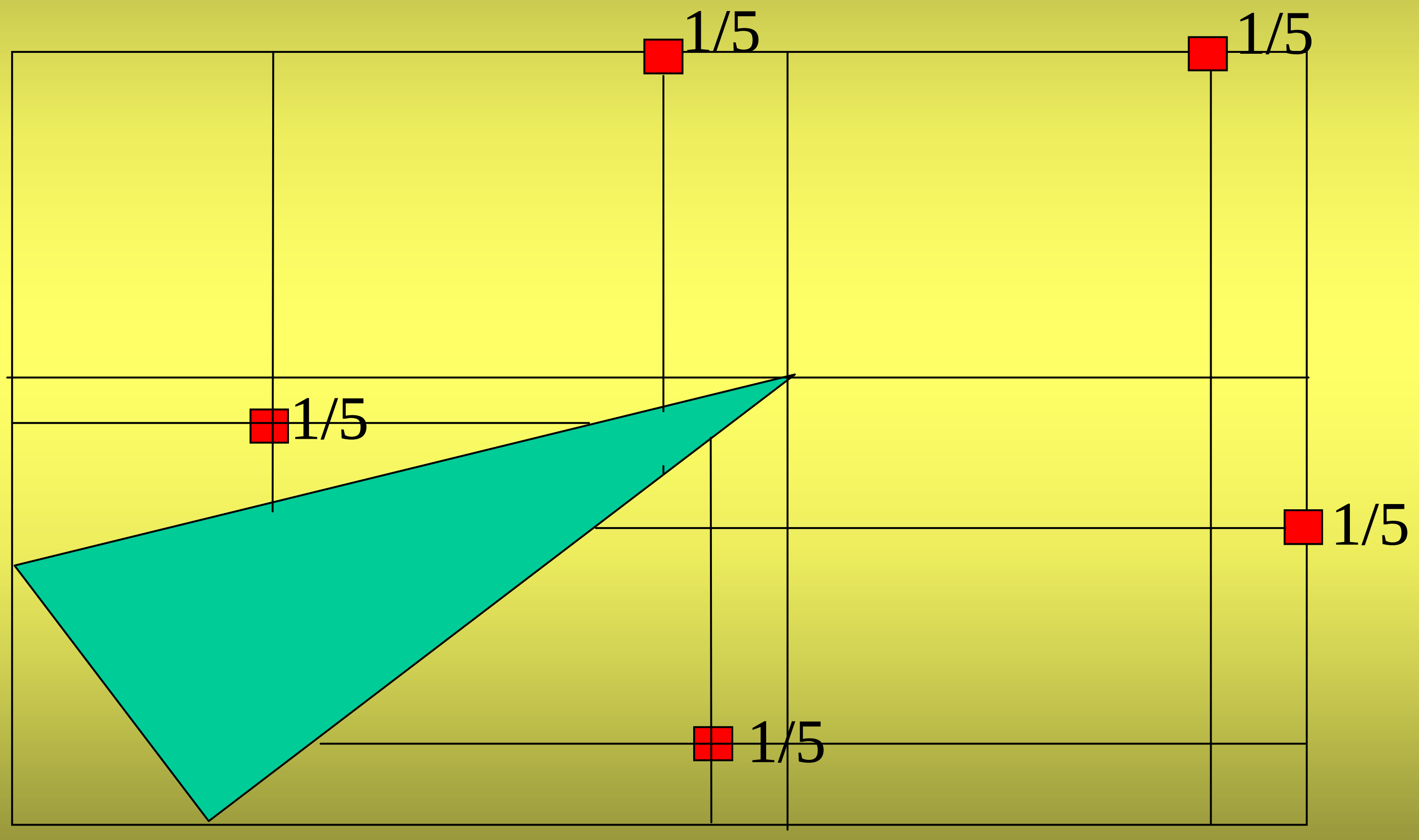
Teorema 2

- Suponha que 2 pontos não comunicam-se. Então existe pelo menos um caminho de comprimento mínimo entre os pontos que contém uma sequência de nós que comunicam-se de forma simples.
- Tudo isso implica em que nós reduzimos o problema original para uma rede finita, que pode ser analisada por Dijkstra, etc.

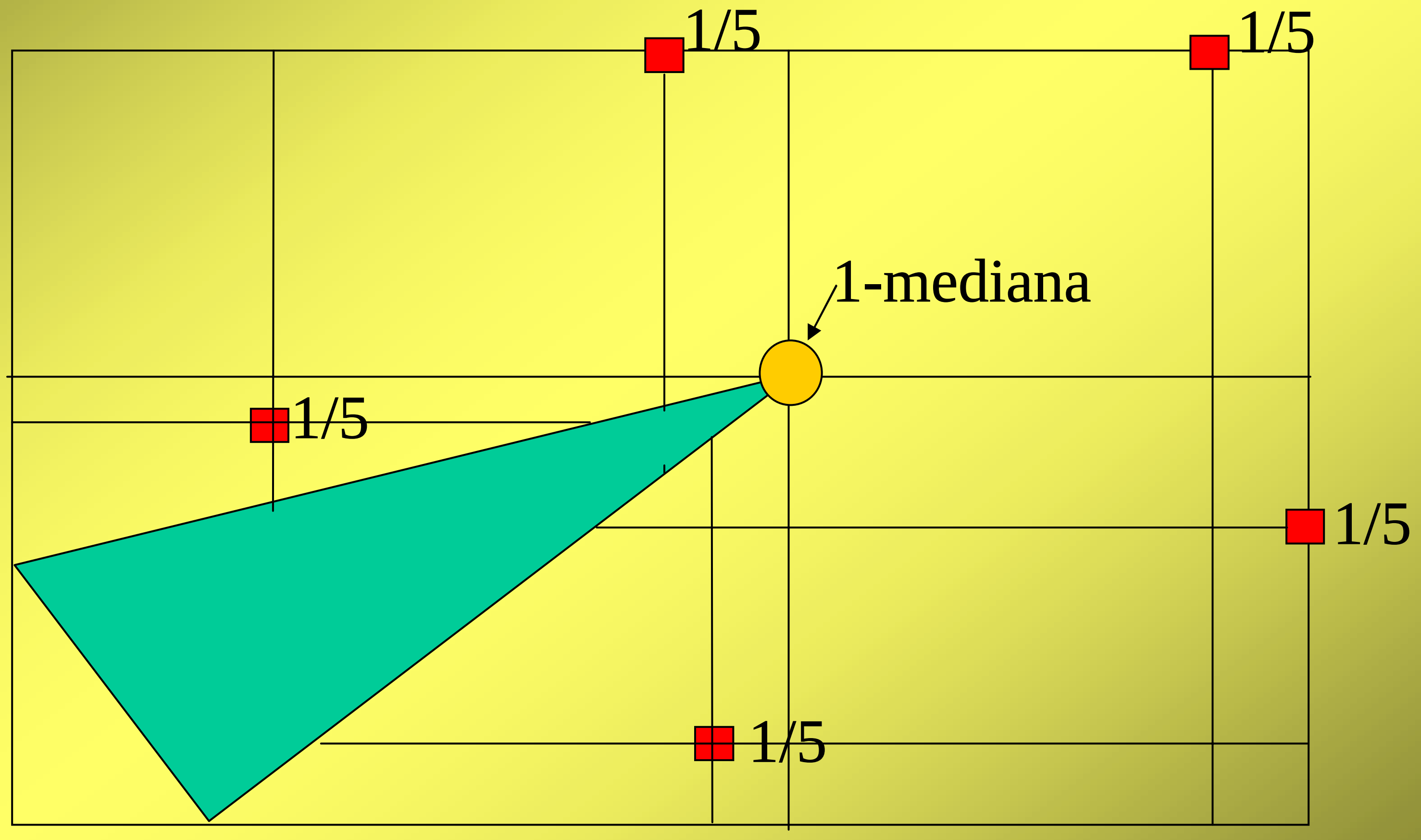
Localização de medianas considerando barreiras e métrica retangular



Localização de medianas considerando barreiras e métrica retangular



Localização de medianas considerando barreiras e métrica retangular



Mediana com Fila Estocástica

Mediana com Perda Estocástica

Motivação

- A mediana convencional de Hakimi é determinística
- Não considera aspectos de incerteza no tempo e duração do serviço solicitado
- Não considera o efeito de formação de filas para clientes não atendidos (perdidos)
- A espera em fila pode ser maior que o tempo de deslocamento

O Modelo

Servidor único estacionado em $x \in G$

λh_i = taxa Poissoniana de atendimentos solicitados no nó i

Tempo de deslocamento =

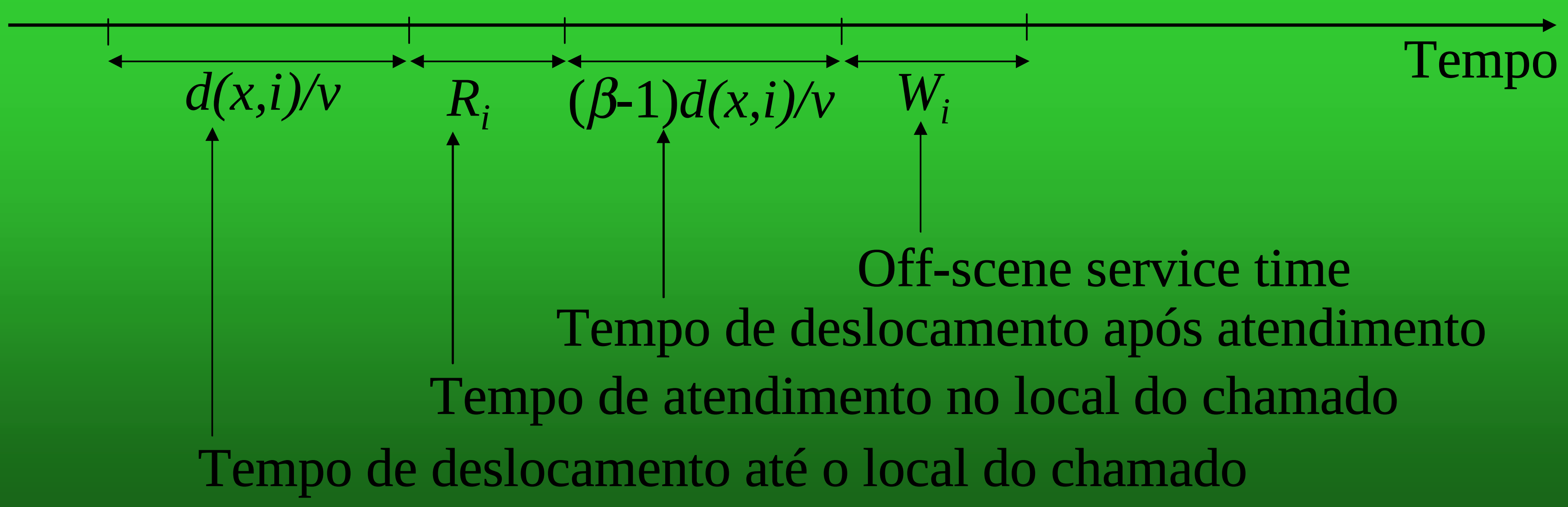
distância de viagem/velocidade = d/v

O tempo necessário para percorrer a fração α do arco (i,j) é $(\alpha)d_{ij}/v$ (d_{ij}= *comprimento do arco*)

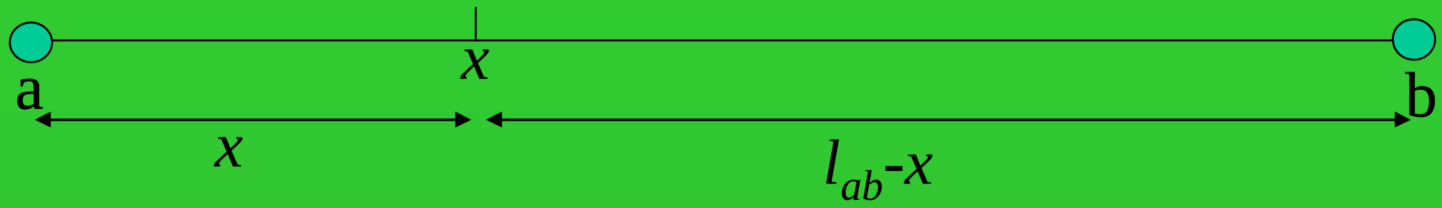
$S_i(x)$= tempo de atendimento associado ao nó i

$S_i(x)$= tempo de atendimento associado ao nó i

$$S_i(x) = \beta d(x,i)/v + R_i + W_i$$



Localização potencial de uma facilidade de serviço



Modelo 1:
Mediana com Perda Estocástica

- Quando um cliente solicita atendimento:
  - Designe um servidor ao cliente, caso o servidor estiver disponível
  - Caso contrário, encaminhe o cliente para um outro servidor de back-up (ou seja, o cliente é perdido)

Modelo 2: Mediana com Fila Estocástica

- Considere uma fila com capacidade infinita
- Quando um cliente solicita atendimento:
  - Designe um servidor ao cliente, caso o servidor estiver disponível
  - Caso contrário, o cliente é encaminhado para uma fila com disciplina FCFS

Modelo 1:
Mediana com Perda Estocástica

$\rho(x)$=taxa de ocupação do servidor, quando o servidor está estacionado em *x*

O custo médio de viagem para um atendimento aleatório é

$$\overline{J}(x) = (1 - \rho(x)) \sum_{i=1}^{n} h_i d(x,i) / v + \rho(x)\gamma$$

h_i = porcentagem de chamdos do nó *i*

γ = custo de rejeição > 0

Problema: Mediana com Perda Estocástica

Determine $x^* \in G$ de forma que

$$\bar{J}\left(x^*\right) \leq \bar{J}(x) \text{ para todos } x \in G$$

Lema: Existe pelo menos um nó de G que é uma mediana com perda estocástica e este nó corresponde a uma mediana de Hakimi.

A prova deste lema requer a demonstração de que $\bar{J}(x)$ cresce de forma monotônica com o tempo (ou distância) médio(a) de viagem

Modelo 2:
Mediana com Fila Estocástica

$$\overline{T_R}(x) \equiv \text{tempo médio de resposta} = \overline{W_q}(x) + \bar{t}(x)$$

em que

$$\overline{W_q}(x) = \text{atraso médio em fila}$$

$$\bar{t}(x) = \text{tempo médio de viagem}$$

Mediana com fila estocástica:

Determine $x^* \in [a, b], [a, b] \in L$, de forma que

$\overline{T_R}\left(x^*\right) \leq \overline{T_R}\left(x\right)$ para todos $x \in (a', b'), (a', b') \in L$

Problema: temos pontos de mudança nos arcos, conforme discutido em classe. Um ponto de mudança em um arco é equidistante de um determinado nó, independente do sentido em que o arco que contém o ponto de mudança é percorrido. Neste ponto, ocorre a mudança do caminho ótimo para o nó em questão.

Algoritmo

- Podemos provar a convexidade da função objetivo entre pontos de mudança
- Implica em um algoritmo com número finito de passos para determinar *x**

$x^*(\lambda)$: trajetória da localização ótima em função de λ

- Quando $\lambda = 0+$, x^* é uma mediana de Hakimi em G
- Quando λ tende a λ_{max}-, x^* também é uma mediana de Hakimi em G
- O que acontece entre os valores extremos de λ?