

# Aprendizado 1\*

## Jogada Fictícia

14.126 Teoria dos Jogos

Sergei Izmalkov

Muhamet Yildiz

\*Agradecimentos especiais a Paul Milgrom por  
permitir o uso de seus slides para a disciplina  
14.126 (4º Trimestre de 2001)

1

- “No fim das contas, não se pode dizer que os insetos raciocinam, então a racionalidade não pode ser tão crucial se a teoria dos jogos conseguir de alguma forma prever seu comportamento sob condições adequadas. Ao mesmo tempo, o advento da economia experimental deixou claro que os sujeitos humanos também não são grandes exemplos de raciocínio. Assim que eles acham o caminho ao equilíbrio de um jogo, eles o fazem tipicamente usando métodos de tentativa e erro”.

*Ken Binmore*

2

## Programa

1. Jogada fictícia
2. Mecanismos de reforço e evolução – dinâmica replicadora
3. Modelos de ajuste com aleatoriedade persistente;
4. Aprendizado em jogos de forma extensiva, racionalidade, etc.

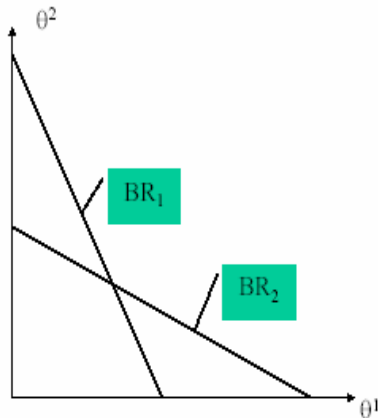
3

## Roteiro – jogada fictícia

1. Ajuste de Cournot
2. Jogada fictícia para 2 jogadores
3. Exemplos
4. Comportamento assintótico
5. Problemas com jogadas fictícias com vários jogadores etc.
6. Jogada fictícia estocástica

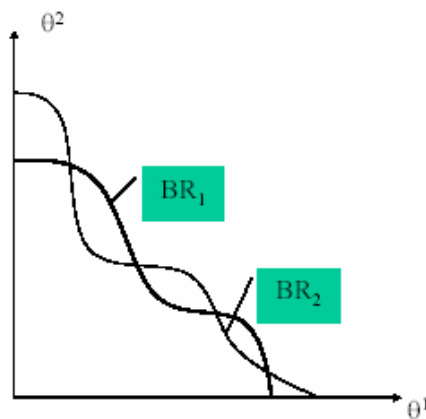
4

## Ajuste de Cournot



- $\theta_{t+1} = f^C(\theta_t)$ , onde
- $f^C(\theta) = (BR^1(\theta^2), BR^2(\theta^1))$ .
- Se  $\underline{\theta}$  é um estado estável de  $f^C$  (i.e.,  $\underline{\theta} = f^C(\underline{\theta})$ ), então  $\underline{\theta}$  é um equilíbrio de Nash.
- O equilíbrio de Nash à esquerda é globalmente estável.

5



- Um estado estável  $\theta$  de  $F$  é estável se, e somente se,  $\forall$  vizinhança  $U$  de  $\theta$ ,  $\exists$  vizinhança  $U_1$  de forma que, se  $\theta_0 \in U_1$ ,  $F_t(\theta_0) \in U \forall t > 0$ .  
SALTO SALTO

Um estado estável  $\theta$  de  $F$  é assintoticamente estável se, e somente se, ele for estável e se  $\theta_0 \in U$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(\theta_0) = \theta$ .

Um estado estável  $q$  de  $F$  é globalmente estável se, e somente se, for ass. estável e  $U = \Theta$

6

## Jogada fictícia – 2 jogadores

- $(S^1, S^2, u^1, u^2)$ , um jogo.
- $k_0^i : S^{-i} \rightarrow \mathbb{R}_{++}; k_t^i(s^{-i}) = \begin{cases} k_{t-1}^i(s^{-i}) + 1 & \text{if } s_{t-1}^{-i} = s^{-i} \\ k_{t-1}^i(s^{-i}) & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- $\gamma_t^i(s^{-i}) = \frac{k_t^i(s^{-i})}{\sum_{\tilde{s}^{-i}} k_t^i(\tilde{s}^{-i})}$
- Jogada fictícia é qualquer regra pt com

$$\rho_t^i(\gamma_t^{-i}) \in \text{BR}^i(\gamma_t^{-i}).$$

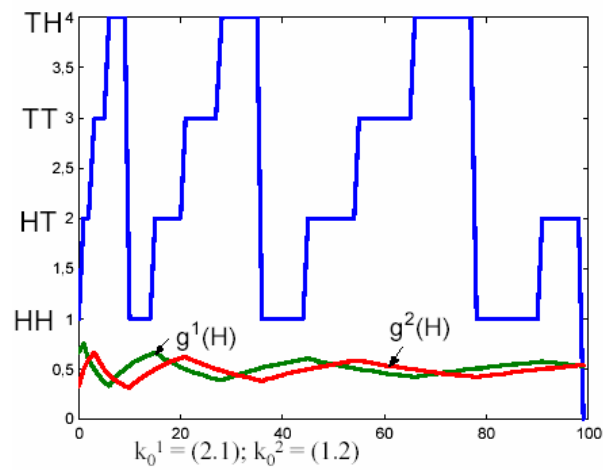
7

## Exemplo – cara-ou-coroa

	Cara (H)	Coroa (T)
Cara	(1,-1)	(-1,1)
Coroa	(-1,1)	(1,-1)

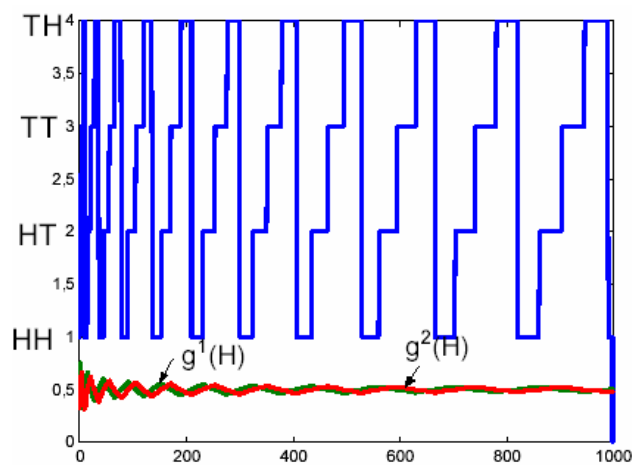
8

## Jogada Fictícia em Cara-ou-coroa



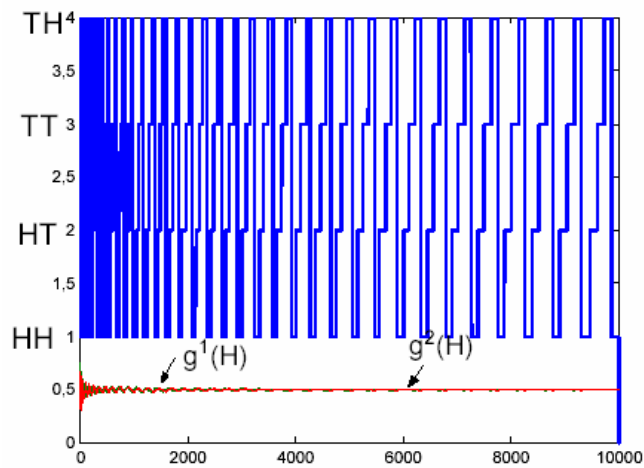
9

## Jogada Fictícia em Cara-ou-coroa 2







10

## Jogada Fictícia em Cara-ou-coroa 3



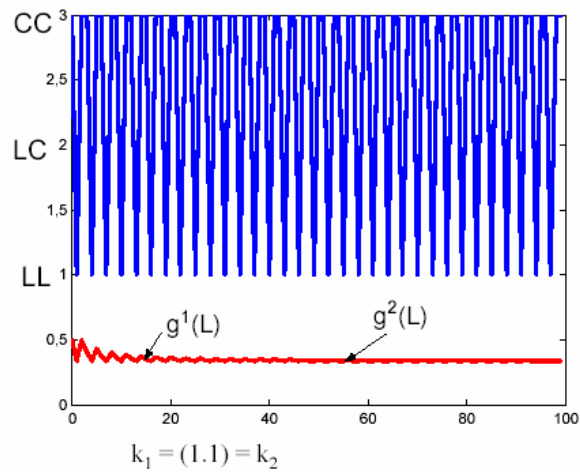
11

## Jogo da Galinha

		
	$(-1, -1)$	$(1, 0)$
	$(0, 1)$	$(1/2, 1/2)$

12

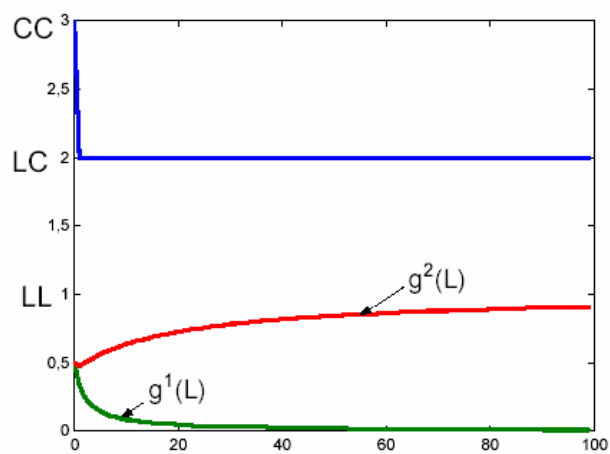
## Jogada Fictícia no Jogo da Galinha



13

## Jogada Fictícia no Jogo da Galinha – 2

$k_0^1 = (1.1); k_0^2 = (10.10)$



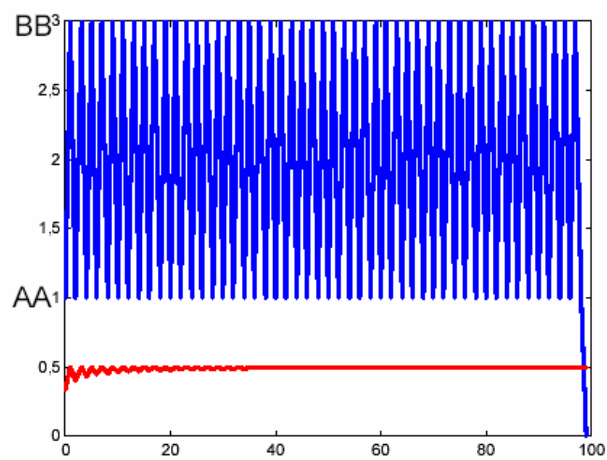
14

## Jogo de Incoordenação

	A	B
A	(0,0)	(1,1)
B	(1,1)	(0,0)

15

## Incoordenação



16



## Comportamento assintótico

Proposição: (1) Se  $s$  é um equilíbrio estrito de Nash e  $s$  é jogado em um  $t$  do processo de jogada fictícia, então  $s$  é jogado daí em diante. (2) Qualquer estado estável de estratégia pura de jogadas fictícias é um equilíbrio de Nash.

Prova: (1)

1.  $\underline{s}^i \in BR^i(\gamma_t^i)$ .
2.  $\gamma_{t+1}^i = (1-a_t) \gamma_t^i + a_t \delta(\underline{s}^i)$ ;  $\delta$  é o delta de Dirac.
3.  $u^i(\underline{s}^i, \gamma_{t+1}^i) = (1-a_t) u^i(\underline{s}^i, \gamma_t^i) + a_t u^i(\underline{s}^i, \underline{s}^i)$ .
4.  $\{\underline{s}^i\} = BR^i(\gamma_{t+1}^i)$

17

## Comportamento assintótico (continuação)

- Distribuição empírica:  $d_t^j(s^j) = [k_t(s^j) - k_0(s^j)]/t$

**Proposição:** Se as distribuições empíricas sobre as escolhas de cada jogador convergirem, então o produto dessas distribuições é um equilíbrio de Nash.

**Proposição:** As distribuições empíricas  $d_t^j$  sobre as escolhas de cada jogador  $j$  convergem se a fase tiver *payoffs* genéricos e for  $2 \times 2$  ou soma zero, ou solucionável por eliminação iterada de estratégias estritamente dominantes, ou...

18

## O exemplo de Shapley

	L	M	R
T	0,0	1,0	0,1
M	0,1	0,0	1,0
D	1,0	0,1	0,0

(T, M) à (T, R) à (M, R) à (M, L) à (D, L) à (D, M) à (T, M) à ...

As distribuições empíricas não convergem, mas seguem um ciclo-limite.

19

## Problemas com jogadas fictícias com diversos jogadores

- Um jogador deve presumir que as estratégias dos demais jogadores não são correlacionadas?
- Um jogador deve presumir que as estratégias dos demais jogadores são correlacionadas apenas porque ele não sabe quais pares de estratégias independentes são jogadas?

20

# Jogada fictícia estocástica e Equilíbrios de estratégia mista

21

## *Payoffs* perturbados aleatoriamente

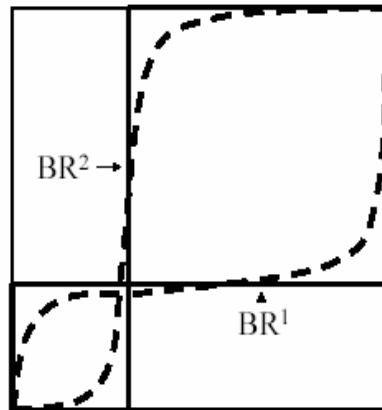
- $\eta_1, \eta_2$  são independentes e identicamente distribuídos com uma distribuição uniforme  $f_x$ .

- Conforme  $x$  se aproxima de 0,  $f_x$  torna-se uma massa unitária em 0.

	H	T
H	$2 + \eta_1, 2 + \eta_2$	$\eta_1, 0$
T	$0, \eta_2$	$1, 1$

22

## *Payoffs perturbados aleatoriamente*



- $BR^i(\sigma^{-i})(s^i)$   
 $= \Pr\{\eta^i | s^i \in BR^i(\sigma^{-i}; \eta^i)\}$
- O perfil  $\sigma$  é uma distribuição de Nash se, e somente se,  

$$BR^i(\sigma^{-i}) = \sigma^i \ (\forall i)$$
- A *jogada fictícia estocástica* é uma regra que joga uma estratégia mista em  $\underline{BR}^i(\gamma_t^{-i})$ .

23