

Epistemologia Interativa - II

Sergei Izmalkov

Muhamet Yildiz

Programa

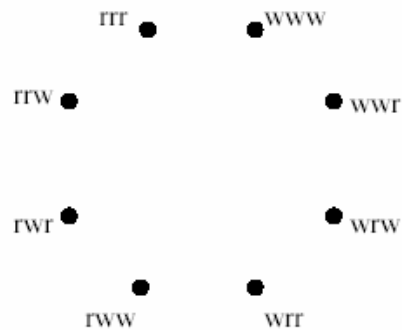
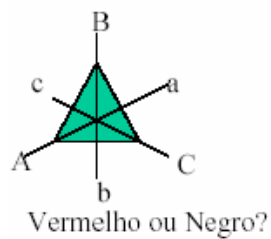
1. Resumo
2. Um Exemplo
3. Espaço de Estado Universal
4. Espaço de tipo universal – abordagem de Bayes
5. Um espaço de estado para jogos
6. Bases Epistêmicas para Equilíbrio Correlacionado, Equilíbrio de Nash e Racionalizabilidade.

Resumo

$\kappa(\omega)$	
$I(\omega) = \{\omega' \in \Omega \mid \kappa(\omega) = \kappa(\omega')\}$	$I_{1,\dots,n}(\omega) = \bigcap_{\omega \in F \in \mathfrak{K}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{K}_n} F$
$\mathfrak{I} = \{I(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$	$\mathfrak{I}_1 \wedge \mathfrak{I}_2 \wedge \dots \wedge \mathfrak{I}_n$
$\mathfrak{K} = \{KE \mid E \in \mathfrak{E}\}$ $\mathfrak{K} = \{\bigcup_{\omega \in \Omega} I(\omega) \mid \Omega' \subseteq \Omega\}$	$\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{K}_n$
$KE = \{\omega \in \Omega \mid I(\omega) \subseteq E\}$	$CKE_{1,\dots,n}$

Exemplo

$$CK_{AB}E \cap CK_{BC}E \cap CK_{AC}E \neq CK_{ABC}E$$



Espaço-estado universal

- X = um alfabeto de letras x, y, z, \dots
- Fórmulas: linhas finitas de símbolos s.t.
 - Cada letra é uma fórmula;
 - Se f e g são fórmulas, $(f) \text{OU} (g)$ também é;
 - Se f é uma fórmula, (f) e SÍMBOLO NÃO são.
- Uma lista L (de fórmulas) é *logicamente fechada* se $[f \in L \ \& \ (f \Rightarrow g) \in L] \Rightarrow g \in L$.
- *Epistemicamente fechado* se $f \in L \Rightarrow k_i f \in L$.
- Um estado ω é qualquer lista logicamente fechada s.t.
 - $f \in \omega \text{ NÃO } (f) \in \omega$; (f) ;
 - ω inclui todas as “tautologias”
- Ω = o conjunto de todos os estados.
- $\kappa_i(\omega) = \{k_i(f) \mid k_i(f) \in \omega\}$

Tautologias

O conjunto de tautologias é a menor lista logicamente e epistemicamente fechada que contem todos:

- $(f \text{ OU } f) \Rightarrow f$
- $f \Rightarrow (f \text{ OU } g)$
- $(f \text{ OU } g) \Rightarrow (g \text{ OU } f)$
- $(f \Rightarrow g) \Rightarrow ((h \text{ OU } f) \Rightarrow (h \text{ OU } g))$
- $k_i(f) \Rightarrow f$
- $(k_i(f \Rightarrow g)) \Rightarrow (k_i(f) \Rightarrow k_i(g))$
- $k_i(f) \Rightarrow k_i(k_i(f))$
- $\text{NÃO}(k_i(f)) \Rightarrow k_i(\text{NÃO}(k_i(f)))$

Alguns teoremas

- $E_f := \{\omega \in \Omega \mid f \in \omega\}$
- $\sim E_f = E_{\neg O(f)}$
- $E_f \cup E_g = E_{(f \vee g)}$
- $E_f \cap E_g = E_{(f \wedge g)}$
- $K_i E_f = E_{K_i(f)}$
- $E_f \subseteq E_g \Leftrightarrow [f \Rightarrow g \text{ é uma tautologia}]$

Um exemplo tipo espaço

- Um duopólio Cournot linear
 - Firma $\{1,2\}$
 - $P = 1 - Q$
 - Custos c_1 e c_2
 - Crenças sobre custos, crenças sobre crenças sobre custos...

Espaço Tipo universal

- S = espaço básico de incerteza.
- N = agentes $\{1, 2, \dots, n\}$
- $\Delta(A)$ é o conjunto de distribuições de probabilidade em A .
- Definir
 - $X_0 = S$;
 - $X_1 = [\Delta(X_0)]^n \times X_0 = [\Delta(S)]^n \times S$;
 - ...
 - $X_n = [\Delta(X_{n-1})]^n \times X_{n-1}$
- Crenças de i : $T_0^i = \prod_{n=1}^{\infty} \Delta(X_{n-1}) = \Delta(X_0) \times \Delta(X_1) \times \dots$
- Um tipo de i : $(t_1^i, t_2^i, \dots, t_n^i, \dots)$
- $\Omega' = S \times T_0^1 \times T_0^2 \times \dots \times T_0^n$

Coerência

- T_1^i = crenças coerentes de i , por exemplo,
 1. $\text{marg}_{X_{n-1}} t_{n+1}^i = t_n^i$
 2. $\text{marg de } t_{n+1}^i \text{ na } i \text{ cópia de } \Delta(X_{n-1}) \text{ é massa de ponto em } t_n^i$.
- $T^i \subseteq T_1^i$
- $\Omega = S \times T^1 \times T^2 \times \dots \times T^n$

Estrutura de informação - Bayes

- Uma estrutura de informação $(\Omega, \mathfrak{I}_i, p_i)$
- Crença com segurança:

$$B_i(A) = \{ \omega \mid p_i(A|I_i(\omega)) = 1 \}$$

Um espaço de estado para jogos

- Considere uma família de jogos $\{(A, u) \mid u: A \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ para um espaço fixo de estratégia $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.
- Modelo: $(\Omega, \mathfrak{I}_i, p_i, u, s_i)_{i=1, \dots, n}$ onde
 - Ω é um espaço de estado
 - \mathfrak{I}_i é partilha de informação de i
 - $p_i(\cdot|\cdot)$ um sistema de probabilidade condicional para i ;
 - $u(\omega)$ é um perfil $u: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de funções de utilidade
 - $s_i: \Omega \rightarrow A_i$
- i conhece sua função de utilidade e estratégia:
 $\omega' \in I_i(\omega) \Rightarrow s_i(\omega') = s_i(\omega) \ \& \ u_i(\omega') = u_i(\omega)$.

Racionalidade (Bayesiana)

Um jogador i deve ser racional (Bayesiano) em ω se, dadas suas crenças em ω , sua ação em ω maximiza sua utilidade esperada, por exemplo, para todos $\alpha_i \in A_i$, FÓRMULA

$$\sum_{\omega' \in I_i(\omega)} u_i(\omega') (s_i(\omega), s_{-i}(\omega')) p_i(\omega' | I_i(\omega)) \geq \sum_{\omega' \in I_i(\omega)} u_i(\omega') (a_i, s_{-i}(\omega')) p_i(\omega' | I_i(\omega))$$

- Se (A, u) é fixo, isso simplifica para

$$\sum_{\omega' \in I_i(\omega)} u_i(s_i(\omega), s_{-i}(\omega')) p_i(\omega' | I_i(\omega)) \geq \sum_{\omega' \in I_i(\omega)} u_i(a_i, s_{-i}(\omega')) p_i(\omega' | I_i(\omega))$$

Hipótese anterior comum

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n \text{ (CPA)}$$

Exemplo

Jogo fundamental

	C	D
C	(2,2)	(0,0)
D	(0,0)	(1,1)

Espaço de estado

	c1	d1	d2
C1	.5,.5	.5,.5	0,0
D1	.5,.5	0,0	.5,.5
D2	0,0	.5,.5	.5,.5

Equilíbrio Correlato

- Dado um jogo de forma estratégica finita (A,u) , um perfil de estratégia correlato consiste nos seguintes elementos:
 - Um espaço de probabilidade finita (Ω', π)
 - Para cada jogador i , uma partilha de informação P_i de Ω' .
 - Para cada jogador i , uma estratégia $\sigma_i: \Omega' \rightarrow A_i$ mensurável com relação a P_i .
- O perfil de estratégia correlacionado é um equilíbrio correlato se, para cada i e cada estratégia τ_i mensurável com relação a P_i ,

$$\sum_{\omega \in \Omega'} u_i(\sigma(\omega)) \pi(\omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega'} u_i(\tau_i(\omega) \sigma_{-i}(\omega)) \pi(\omega)$$

CPA + CK(Racionalidade+u) = CE

Teorema: Faça com que $(\Omega, \mathfrak{I}_i, p_i, u, s_i)_{i=1, \dots, n}$ seja um modelo para um jogo (A, u) onde Ω é finito.

Presuma $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$. Se cada jogador é racional em cada ω , então a distribuição de s_i é uma distribuição de equilíbrio correlato.

Prova: Defina $(\Omega', P_i, \pi, \sigma_i) := (\Omega, \mathfrak{I}_i, p, s_i)$. Fixe i , P_i -mensurável t . Para qualquer ω por racionalidade

$$\sum_{\omega' \in I_i(\omega)} u_i(s_i(\omega), s_{-i}(\omega')) p(\omega' | I_i(\omega)) \geq \sum_{\omega' \in I_i(\omega)} u_i(t_i(\omega), s_{-i}(\omega')) p(\omega' | I_i(\omega)).$$

Soma sobre $I_i(\omega)$:

$$\sum_{\omega' \in \Omega} u_i(s_i(\omega'), s_{-i}(\omega')) p(\omega') \geq \sum_{\omega' \in \Omega} u_i(t_i(\omega'), s_{-i}(\omega')) p(\omega').$$

Soma sobre SÍMBOLOS

$$\begin{aligned} \sum_{I_i(\omega)} \sum_{\omega' \in I_i(\omega)} u_i(s_i(\omega), s_{-i}(\omega')) p(\omega' | I_i(\omega)) p(I_i(\omega)) &\geq \sum_{I_i(\omega)} \sum_{\omega' \in I_i(\omega)} u_i(t_i(\omega), s_{-i}(\omega')) p(\omega' | I_i(\omega)) \\ &\quad \updownarrow \quad \quad \quad \updownarrow \\ \sum_{\omega' \in \Omega} u_i(s_i(\omega'), s_{-i}(\omega')) p(\omega') &\geq \sum_{\omega' \in \Omega} u_i(t_i(\omega'), s_{-i}(\omega')) p(\omega') \end{aligned}$$

$CK(\text{Racionalidade}+u) = \text{Racionalizabilidade}$

Definição: $R_i :=$ Estratégias racionalizáveis para i .

- Teorema: Faça com que $(\Omega, \mathfrak{T}_i, p_i, u, s_i)_{i=1, \dots, n}$ seja um modelo para um jogo (A, u) . Se cada jogador é racional em cada ω , então $s_i(\omega) \in R_i$ para cada i . Além disso, há ali um modelo $(\Omega, \mathfrak{T}_i, p_i, u, s_i)_{i=1, \dots, n}$ no qual $s_i(\Omega) = R_i$.

Definições

- Conjectura de um jogador i é FÓRMULA

$$\phi^i = \arg \max_{A_i} p(\cdot | I_i(\omega))$$

- Conjectura de um jogador i sobre j é marginal de ϕ^j em A_j .

Teorema

Considere um jogo para duas pessoas (A,u) . Faça com que $(\Omega, \mathfrak{I}_i, p_i, u, s_i)_{i=1,2}$ seja um modelo, e $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ seja um par de conjecturas. Presuma que, em algum estado SÍMBOLO seja mutuamente conhecido que

1. $u(\omega) = u$,
2. Os jogadores são racionais,
3. $\phi = \psi$.

Então, (ψ_2, ψ_1) é um equilíbrio de Nash.

Teorema

Considere um jogo (A,u) . Faça com que $(\Omega, \mathfrak{I}_i, p_i, u, s_i)_{i=1,\dots,n}$ seja um modelo, e ψ seja um n -tuplo de conjecturas. Presuma CPA e que, com probabilidade positiva, seja mutuamente conhecido que

1. $u(\omega) = u$,
2. Os jogadores são racionais
e é de conhecimento geral que $\phi = \psi$.

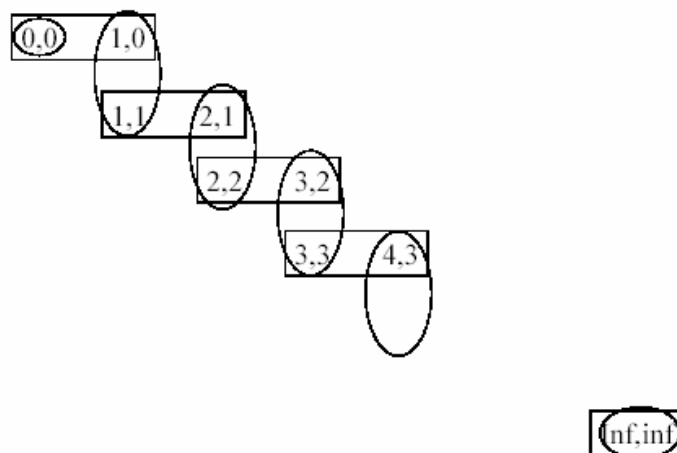
Então, dado qualquer i marginal de cada ψ^j em A_i é o mesmo σ_i , e σ é um equilíbrio de Nash.

Jogo de Correio Eletrônico

	A	B
A	1,1	0,-3
B	-3,0	0,0

	A	B
A	0,0	0,-3
B	-3,0	1,1

E-mail



Conhecimento quase geral

- $B_i^q(A) = \{ \omega \mid \text{pi}(A \mid I_i(\omega)) \geq q \}$
- E é crença- q comum em $\omega \Leftrightarrow$
$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_N^q)^n(E)$$
- E é evidente- $q \Leftrightarrow E$ é crença- q comum em cada ω em E .
- Solidez contra informação incompleta.