

Soluções não-cooperativas

MIT – 14.126 teoria dos jogos
Sergei Izmalkov
Muhamet Yildiz
(Agradecimentos a Paul Milgrom)

Soluções não-cooperativas

Definições

Jogos de forma normal

◆ Um jogo de forma normal é tripla (N, S, u)

■ $N = \{1, \dots, N\}$ é o conjunto (não-vazio) de jogadores

■ $S = S_1 \times \dots \times S_N$ é o conjunto de perfis de estratégia

◆ Um estratégia mista para n é uma distribuição de probabilidade $\pi_n \in \Delta(S_n)$, isto é, $\pi_n \in \Delta(S_n)$.

■ $u: S \rightarrow \mathbb{R}^N$ é o vetor de ganho.

◆ Defina $u(\pi) = \sum \dots \sum u(s_1, \dots, s_N) \pi_1(s_1) \dots \pi_N(s_N)$.

◆ O ganho do jogador n é $u_n(\pi)$.

◆ As estratégias podem ser correlacionadas: $u(\pi) = \sum_s u(s) \pi(s)$

Estratégias Mistas?

◆ Interpretações para equilíbrio misto

■ Blefe?

◆ Há agora um consenso informal que vê o “blefe” como equilíbrio partilhado em jogos de informações incompletas.

■ Incerteza em outras mentes

■ Proporções de população

■ Harsanyi: Aproximação comportamental a equilíbrio de estratégia pura em jogos com perturbações de ganho aleatório

Razões para Correlação

- ◆ As jogadas das pessoas podem ser correlacionadas objetivamente por razões alheias ao jogo:
 - Elas podem observar uma variável comum, como o clima.
 - Elas podem ter uma cultura em comum que as direcione a inclinações comuns, desconhecidas para o observador externo, que aparecem como correlações no comportamento.
- ◆ A jogada também pode ser subjetivamente correlacionada.
 - O observador pode aprender a respeito de algum aspecto desconhecido do comportamento humano.
 - O observador pode saber que cada tribo tem um chefe sem saber quem ele é. Então o comportamento de “chefe” de um jogador torna menos provável que outros jogadores exibam um comportamento de “chefe”.

Soluções não-cooperativas

Dominância e Racionalizabilidade

Racionalidade Bayesiana

- ◆ Um jogador racional (Bayesiano)
 - Possui crenças sobre a provável jogada dos outros
 - Otimiza de acordo com essas crenças
- ◆ Teorema. Uma estratégia para o jogador n é a *melhor resposta a alguma* distribuição de probabilidade da jogada dos outros se, e somente se, *não for estritamente dominada* por nenhuma estratégia pura ou mista do jogador n .

Prova

- ◆ Se s_n é estritamente dominada por s_n' , então s_n' é a melhor resposta a qualquer distribuição de probabilidade sobre as estratégias dos outros.
- ◆ Suponha que s_n não seja estritamente dominada. Seja K o número de perfis em s_n . Então os dois subconjuntos convexos seguintes de R^K são disjuntos.
 - $A = \text{Envoltório convex}\{(u_n(s_n', s_{-n}); s_{-n} \in S_{-n}) | s_n' \in S_n\}$
 - $B = \{z \in R^K | z > u_n(s_n, \cdot)\}$
- ◆ Pelo teorema do hiperplano separador, há um vetor não-zero p tal que $p \cdot z$ para todo $z \in A$, $y \in B$. Por inspeção, p é não-negativo e pode ser normalizado pelo vetor de probabilidade necessário.
- ◆ Uma vez que $y^* = (s_n, \cdot)$ está no limite de B , $p \cdot y^* \geq p \cdot z$ para todo $z \in A$. **CQD.**

Equilíbrio de Estratégia Dominante

- ◆ Assumindo-se que para cada n há uma estratégia s_n^* que domina estritamente todas as outras estratégias de n .

Teorema: Se todos os jogadores forem racionais, então s^* será jogada.

- ◆ Assumindo-se que para cada n há uma estratégia s_n^{**} que domina fracamente todas as outras estratégias de n .

Teorema: Se todos os jogadores forem racionais e cautelosos então s^{**} será jogada.

Racionabilidade Definida

◆ Definição. Uma estratégia s_j para o jogador j é racionalizável se houver uma coleção de conjuntos $\{Z_n\}$ tal que $s_j \in Z_j$ e para todos os jogadores n ,

■ $Z_n \subseteq S_n$

■ Para todo $s_n \in Z_n$, s_n é a melhor resposta para uma crença p_n , cujo suporte seja um subconjunto de Z_{-n} .

◆ Note que

■ Todos os elementos de cada, como Z_n , são racionalizáveis.

■ A união de todos como Z_n é o conjunto de estratégias racionalizáveis para o jogador n .

Iterações para Racionabilidade

◆ Primeiro Passo

- Cada jogador é “racional” (Bayesiano). Portanto, cada jogador joga apenas estratégias que não são estritamente dominadas.
- Criar uma nova forma estratégica pela eliminação de estratégias dominadas do jogo original.

◆ Iteração $n+1$

- Cada jogador sabe que os outros jogarão apenas as estratégias remanescentes da iteração n . Os jogadores racionais escolhem uma resposta melhor, isto é, uma estratégia que não seja estritamente dominada no novo jogo.
- Criar uma forma estratégica $n+1$ pela eliminação de estratégias dominadas da forma estratégica n .

- ◆ Se o jogo original for finito, eventualmente nenhuma mudança será feita.

Dominância Estrita Iterada e Racionabilidade

- ◆ Teorema. Quando o procedimento iterativo termina, as estratégias remanescentes para cada jogador n são precisamente as estratégias racionalizáveis de n .
- ◆ Delineamento da prova.
 - Cada estágio elimina apenas estratégias que não são racionalizáveis.
 - As estratégias remanescentes são necessariamente racionalizáveis.

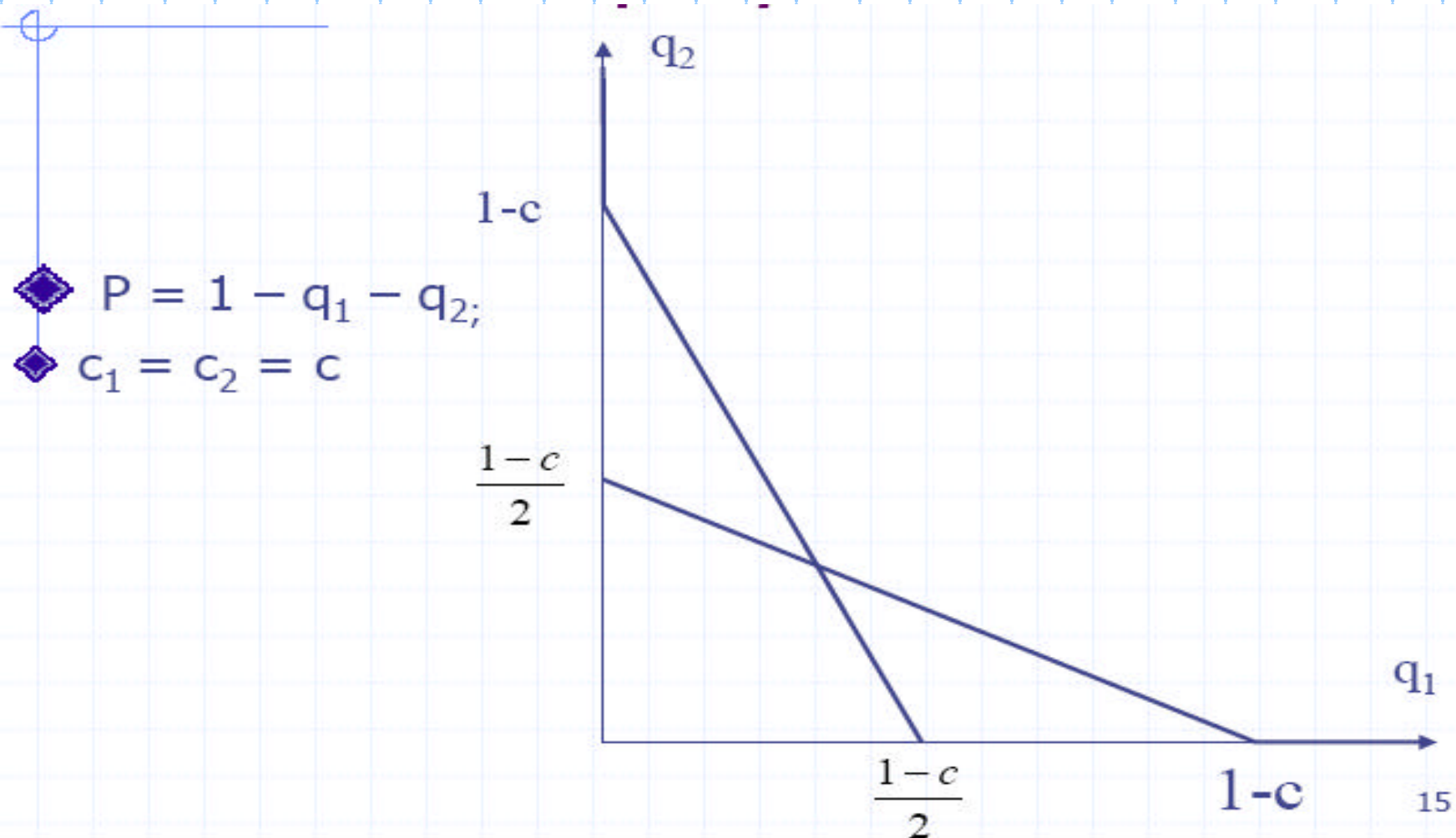
Conhecimento comum de Racionalidade e Racionabilidade

Teorema (Bernheim, Pearce): Assume-se que os ganhos e a racionalidade são de conhecimento comum. Então, cada jogador deve jogar uma estratégia racionalizável. Além disso, dado qualquer perfil de estratégia racionalizável s , há uma hierarquia de crenças na qual s é jogada.

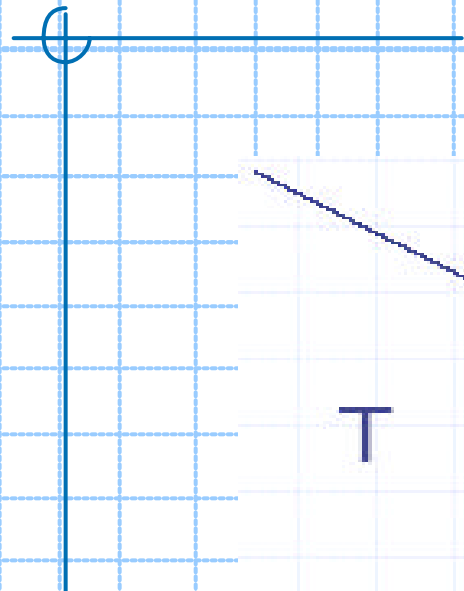
Equilíbrio de Nash e Racionabilidade

- ◆ Cada equilíbrio de Nash é racionalizável.
- ◆ Teorema (Milgrom e Roberts): Toma-se um jogo supermodular em uma látice completa. Então existem o menor e maior equilíbrios de Nash, x e y , respectivamente. Se z for racionalizável, então $x \leq z \leq y$.
- ◆ Corolário: Se um jogo supermodular possui um único equilíbrio de Nash, então ele tem uma única estratégia racionalizável.

Racionabilidade em Duopólio de Cournot Linear



Exemplo (Robustez)



	L	R
T	2,1.001	1001,1
B	1,1	1000,1000

Soluções não-cooperativas

Equilíbrio de Nash e Teoremas da
Sua Existência

Equilíbrio de Nash

- ◆ Um jogo de forma normal é uma tripla (\mathbf{N}, S, u)
 - $\mathbf{N} = \{1, \dots, N\}$ é o conjunto (não-vazio) de jogadores
 - $S = S_1 \times \dots \times S_N$ é o conjunto de perfis de estratégia
 - ◆ Uma estratégia mista para n é uma distribuição de probabilidade π_n em S_n , isto é, S_n , that is, $\pi_n \in \Delta(S_n)$.
 - $u: S \rightarrow \mathbb{R}^N$ é o vetor de ganho.
 - ◆ Defina $u(\pi) = \sum \dots \sum u(s_1, \dots, s_N) \pi_1(s_1) \dots \pi_N(s_N)$.
- ◆ Equilíbrio: Um perfil estratégico misto $\pi \in \Pi$ é um equilíbrio de Nash se

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\forall \pi'_n \in \Delta(S_n)) u_n(\pi) \geq u_n(\pi'_n, \pi_{-n})$$

Condições epistêmicas para NE

Teorema (Aumann & Brandenburger): Em um jogo de duas pessoas, assuma que funções de ganho, a racionalidade dos jogadores, e suas conjecturas sejam mutuamente conhecidas por todos. Então, as conjecturas constituem um equilíbrio de Nash.

Para $n > 2$ jogadores, nós precisamos de uma hipótese de antecedentes comuns e o conhecimento comum das conjecturas.

Equilíbrio de Existência de Nash

- ◆ Teorema (Nash). Suponha que o número de jogadores e conjuntos de estratégias sejam finitos. Então, há um equilíbrio de Nash.
- ◆ Prova. Seja Δ o conjunto de perfis de estratégia mistas e considere o mapa $f: \Delta \rightarrow \Delta$ dado a seguir. $f_n(\pi)$ é a distribuição de probabilidade em S_n que atribui a qualquer estratégia s_n a probabilidade:

$$f_n(\pi)(s_n) = \frac{\max(0, \pi_n(s_n) + u_n(s_n, \pi_{-n}) - u_n(\pi))}{\sum_{s'_n \in S_n} \max(0, \pi_n(s'_n) + u_n(s'_n, \pi_{-n}) - u_n(\pi))}$$

Continuação da Prova

- ◆ Uma vez que essa função é contínua e Δ seja convexo e compacto, f tem um ponto fixo.
- ◆ Por inspeção, o ponto fixo possui as propriedades que
 - Cada uma das estratégias de n que é jogada com probabilidade zero tem um ganho esperado não maior do que $u_n(\pi)$.
 - Cada uma das estratégias puras de n que é jogada com probabilidade positiva tem o mesmo ganho esperado.
- ◆ Portanto, o ponto fixo é um equilíbrio de Nash.

CQD

Funções Côncavas de Ganho

◆ Teorema. Sejam S_1, \dots, S_N convexos, subconjuntos compactos de um espaço Euclidiano. Suponha que para todo n , $u_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínuo e que para todo S_{-n} , $U(s_n) = u_n(s_n, s_{-n})$ seja côncavo. Então, há um perfil de estratégia de equilíbrio de Nash $s \in S$.

◆ Notas:

- Visto desse modo, esse é um teorema de existência de equilíbrio de Nash de “estratégia pura”.
- Dado qualquer jogo finito, o jogo correspondente em “estratégias mistas” é linear nas estratégias e por isso satisfaz as hipóteses afirmadas.

Prova

- ◆ Considere a correspondência de “melhor resposta”
 $f: S \rightarrow S$, dada por:

$$\begin{aligned} f_n(s) &= \operatorname{argmax} u_n(\cdot, s_{-n}) \\ &= \{s''_n \in S_n \mid (\forall s'_n \in S_n) u_n(s''_n, s_{-n}) \geq u_n(s'_n, s_{-n})\} \end{aligned}$$

- ◆ Observe (próximo slide) que f tem um “grafo fechado” e tem valor convexo.
- ◆ O teorema do ponto fixo de Kakutani se aplica (como vários outros). Por construção, um ponto fixo é um equilíbrio de Nash. **CQD**

Detalhes

◆ Teorema do Ponto Fixo de Kakutani.

- Seja Δ um subconjunto convexo, compacto de \mathbb{R}^N e seja $f: \Delta \rightarrow \Delta$ uma multifunção (“correspondência”) tal que para todo $x \in \Delta$, $f(x)$ seja convexo e tal que o gráfico de f seja fechado. Então, existe $x \in \Delta$ tal que $x \in f(x)$.

◆ Provando o grafo fechado

- Seja $\{s^k\}$ uma seqüência de perfis estratégicos convergindo a s^* ; seja $r^k \in f(s^k)$; e seja r^* um ponto de acumulação de $\{r^k\}$. Nós limitamos nossa atenção a uma subseqüência convergente de $\{r^k\}$. Por continuidade de u ,

$$\begin{aligned} (\forall s'_n \in S_n) u_n(r_n^*, s_{-n}^*) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_n(r_n^k, s_{-n}^k) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} u_n(s'_n, s_{-n}^k) = u_n(s'_n, s_{-n}^*) \end{aligned}$$

Outras Provas da Existência

- ◆ As várias provas “gerais” da existência do equilíbrio de Nash são baseadas nos teoremas de ponto fixo.
 - Alguns são teoremas topológicos
 - Mais adiante vamos tratar de um teorema do ponto fixo com base no modelo lártice.

Soluções não-cooperativas

Equilíbrio Correlacionado

Motivação

- ◆ A jogada de uma pessoa pode ser objetivamente correlacionada por razões alheias ao jogo:
 - Elas podem observar uma variável comum, como o clima.
 - Elas podem ter uma cultura em comum que as direcione a inclinações comuns, desconhecidas para o observador externo, que aparecem como correlações no comportamento.
- ◆ A jogada também pode ser subjetivamente correlacionada.
 - O observador pode aprender a respeito de algum aspecto desconhecido do comportamento humano.
 - O observador pode saber que cada tribo tem um chefe sem saber quem ele é. Então o comportamento de “chefe” de um jogador torna menos provável que outros jogadores exibam um comportamento de “chefe”.

Definição

- ◆ Dado um jogo de forma estratégica finita (N, S, u) um perfil de estratégia correlacionada consiste nesses elementos:
 - Um espaço de probabilidade finito (Ω, π)
 - Para cada jogador n , uma partição de informação P_n de Ω .
 - Para cada jogador n , uma estratégia $\sigma_n: \Omega \rightarrow S_n$ mensurável com respeito a P_n .
- ◆ O perfil de estratégia correlacionada é um equilíbrio correlacionado se, para cada n e cada estratégia τ_n mensurável com respeito a P_n ,

$$\sum_{\omega \in \Omega} u_n(\sigma(\omega)) \pi(\omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega} u_n(\tau_n(\omega), \sigma_{-n}(\omega)) \pi(\omega)$$

Resultado de Caracterização

◆ Teorema. Cada distribuição de probabilidade π dos perfis de estratégias de um equilíbrio correlacionado pode ser atingida estabelecendo-se que o espaço de probabilidade a (S, π) , a partição P_n sejam conjuntos da forma $(S \in S | S_n = a)$, e o perfil de estratégia σ para que $\sigma_n(S) = S_n$.

■ De agora em diante diremos de forma abreviada que “ π é um equilíbrio correlacionado” para dizer que $((S, \pi), P, \sigma)$ como definido no teorema é um equilíbrio correlacionado.

Exemplo

	L	R	
T	2,1	0,0	
B	0,0	1,2	

	L	R	
T	p_1	p_2	
B	p_3	p_4	

	L	R	
T	$\frac{p_1}{p_1 + p_2}$	$\frac{p_2}{p_1 + p_2}$	
B	$\frac{p_3}{p_3 + p_4}$	$\frac{p_4}{p_3 + p_4}$	

	L	R	
T	$\frac{p_1}{p_1 + p_3}$	$\frac{p_2}{p_2 + p_4}$	
B	$\frac{p_3}{p_1 + p_3}$	$\frac{p_4}{p_2 + p_4}$	

◆ Condições

$$\frac{2p_1}{p_1 + p_2} + \frac{0p_2}{p_1 + p_2} \geq \frac{0p_1}{p_1 + p_2} + \frac{1p_2}{p_1 + p_2}$$

- $2p_1 \geq p_2$
- $p_4 \geq 2p_3$
- $2p_4 \geq p_2$
- $p_1 \geq 2p_3$

Resultados Adicionais

- ◆ Teorema. Se π for uma distribuição de probabilidade de perfis estratégicos em um equilíbrio de Nash, então π é o equilíbrio correlacionado.
- ◆ Teorema. O conjunto de equilíbrios correlacionados π é fechado e convexo.
- ◆ Prova. π é um equilíbrio correlacionado se, e somente se, satisfizer o seguinte conjunto de inequações lineares, para as funções $F_n: S_n \rightarrow S_n$ de todos os n jogadores.

$$\sum_{s \in S} \pi(s) u(s) \geq \sum_{s \in S} \pi(s) u(f_n(s_n), s_{-n})$$

- ◆ Teorema. Qualquer estratégia jogada com probabilidade positiva em um equilíbrio correlacionado é racionalizável.

Soluções não-cooperativas

Formas Extensivas e
Racionalidade Seqüencial

Formas Extensivas

◆ Uma forma extensiva consiste em:

- O conjunto de jogadores, N .
- O conjunto de históricos (seqüências) H , que inclui a seqüência vazia e tem a propriedade que, se $(a_1, \dots, a_k) \in H$ e $L < K$, então $(a_1, \dots, a_L) \in H$.
 - ◆ Um histórico (a_1, \dots, a_L) é completo (ou terminal) se não há nenhum $K > L$ tal que $(a_1, \dots, a_L, \dots) \in H$. Todos os históricos infinitos (a_1, \dots, a_k) são completos
 - ◆ Para qualquer histórico não-terminal escreva $A(h) = \{a | (h, a) \in H\}$
- Uma função de ganhos mapeando históricos completos em ganhos de cada jogador.
- Uma função P que atribui a cada histórico não-terminal $h \in H$ um jogador n ou chance c (o jogador que se “movimenta” em h); se $P(h) = c$, também atribui uma distribuição de probabilidade em $A(h)$.
- Uma partição $\{I^k\}$ de h não-terminal com $P(h) \in N$ tal que, se $h, h' \in I^k$, então $A(h) = A(h')$ e $P(h) = P(h')$.

Definições

- ◆ Diz-se que um jogo tem *memória perfeita* se, e somente se, nenhum jogador esquece o que sabia e o que fez. Nós sempre assumimos memória perfeita.
- ◆ Um jogo de informação perfeita é um jogo em que todos os conjuntos de informações são avulsos.

Racionalidade Seqüencial

- ◆ Dado qualquer conjunto de informação I_n , em que o jogador n se move, o jogador n possui
 - Uma distribuição de probabilidade $\mu(.|I_n)$ em I_n
 - E uma distribuição de probabilidade na jogada dos outros no “jogo de continuação” (que pode não ser um “subjogo”),
representando suas crenças condicionais ao par que I_n é alcançado.
- ◆ Um jogador n é seqüencialmente racional se, e somente se, em qualquer conjunto de informações I_n que ele move, ele maximiza seu ganho condicional esperado naquele I_n que é alcançado e de acordo com suas crenças em I_n .

Dominância Condicional

- ◆ Uma estratégia é condicionalmente dominada em I_n se, e somente se, sua restrição ao “jogo de continuação” em I_n for estritamente dominada nesse jogo para cada distribuição de probabilidade em I_n .
- ◆ Um jogador seqüencialmente racional nunca joga uma estratégia condicionalmente dominada.

Dominância Condicional Iterada

◆ Primeiro Passo

- Cada jogador é seqüencialmente racional. Portanto, cada jogador joga apenas estratégias que não são condicionalmente dominadas.
- Crie um novo jogo eliminando as estratégias condicionalmente dominadas do jogo original.

◆ Iteração $n+1$

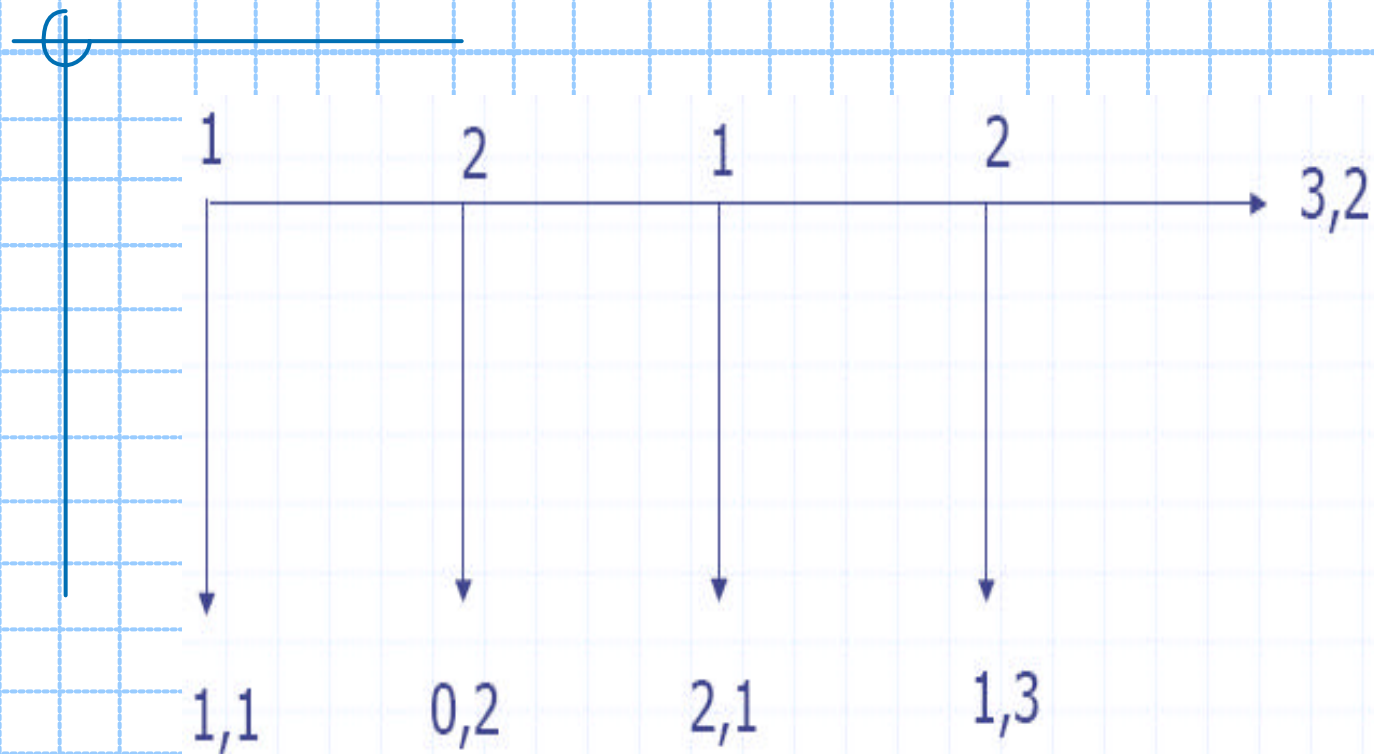
- Cada jogador sabe que os outros irão jogar apenas as estratégias remanescentes da iteração n . Jogadores seqüencialmente racionais escolhem a melhor resposta a qualquer conjunto de informações, isto é, uma estratégia que não seja condicionalmente dominada no novo jogo.
- Crie forma estratégica $n+1$ eliminando estratégias condicionalmente dominadas da forma estratégica n .

- ◆ Se o jogo original for finito, eventualmente nenhuma mudança é feita.

“Teorema”

Se o jogo e a racionalidade seqüencial dos jogadores for de conhecimento comum, então eles jogarão um perfil de estratégia que sobreviva à dominância condicional iterada.

Jogo da Centopéia



Indução Retroativa

- ◆ A dominância condicional iterada em um jogo de informação perfeita com históricos finitos é chamada de indução retroativa.

Equilíbrio Seqüencial

- ◆ Uma avaliação é um par $(S, \mu(.|.))$ de um perfil de estratégia s e uma função $\mu(.|.)$ que gera uma distribuição de probabilidade condicional $\mu(.|I_n)$ em cada conjunto de informações I_n .
- ◆ Uma avaliação $(S, \mu(.|.))$ é seqüencialmente racional se, e somente se, cada s_n for a melhor resposta a s_{-n} em cada conjunto de informações I_n de n de acordo com $\mu(.|I_n)$.
- ◆ Uma avaliação $(S, \mu(.|.))$ é consistente se, e somente se, houver uma seqüência $(S^k, \mu^k(.|.))_k$ de avaliações de modo que
 - $(S^k, \mu^k(.|.)) \rightarrow (S, \mu(.|.))$ na métrica Euclidiana;
 - cada s^k é completamente misto, e
 - $\mu^k(.|.)$ é derivado de s^k utilizando a regra de Bayes.

Equilíbrio Seqüencial

Definição (Kreps, Wilson): Um equilíbrio seqüencial é uma avaliação que seja tanto seqüencialmente racional como consistente.

Exemplo

