

Leilões 2:

**Equivalência de Receitas
Leilões Ótimos**

Sergei Izmalkov e Muhamet Yildiz

1 Notação (IPV)

Definição de valores privados independentes com compradores de risco neutro, sem restrições de orçamento.

- Único objeto indivisível para venda.
- N compradores potenciais, indexados por i . N é de conhecimento comum de todos os participantes.
- X_i – avaliação privada do comprador i – valor máximo que está disposto a pagar pelo objeto.
- $X_i \sim F_i [0, ?_i]$ com $f_i = F'_i$ contínuo e suporte total, independente por todos os compradores.
- $\mathcal{X} = \times_{i=1}^N \mathcal{X}_i$, $\mathcal{X}_{-i} = \times_{j \neq i} \mathcal{X}_j$, $f(\mathbf{x})$ é densidade conjunta.

2 Mecanismos

Um mecanismo de venda (B, π, μ) :

- B_i – um conjunto de mensagens (ou lances) para o jogador i .
- $\pi : B \rightarrow \Delta$ — regra de alocação; aqui Δ é o conjunto de distribuições de probabilidade sobre N .
- $\mu : B \rightarrow \mathbf{R}^n$ — regra de pagamento.

Exemplo: Leilões de primeiro e segundo preço.

Cada mecanismo define um jogo de informação incompleto:

- $\beta_i : [0, \omega_i] \rightarrow B_i$ é uma estratégia;
- O equilíbrio é definido em concordância.

3 Princípio da Revelação

Mecanismo direto (Q, M) :

- $B_i = X_i$;
- $Q : X \rightarrow \Delta$, onde $Q_i(x)$ é a probabilidade de i conseguir o objeto.
- $M : X \rightarrow \mathbf{R}^n$, onde $M_i(x)$ é o pagamento esperado por i .

Proposição: (Princípio da revelação) Dado um mecanismo e o equilíbrio para este mecanismo, há um mecanismo direto em que:

1. é um equilíbrio para cada jogador transmitir a informação verdadeira e
2. os resultados são os mesmos.

Prova: Defina $Q(x) = \pi(\beta(x))$ e $M(x) = \mu(\beta(x))$.
Verifique.

4 Compatibilidade de incentivos

Defina $q_i(z_i)$ e $m_i(z_i)$ para serem a probabilidade de que i consiga o objeto e o pagamento esperado após transmitir a informação z_i , enquanto os demais participantes transmitem a informação verdadeira:

$$q_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) d\mathbf{x}_{-i},$$
$$m_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) d\mathbf{x}_{-i}.$$

O *payoff* esperado para o comprador i com valor x_i e informando z_i é

$$q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

O mecanismo direto (Q, M) é um incentivo compatível (IC) se $\forall i, x_i, z_i$, a função de *payoff* de equilíbrio $U_i(x_i)$ satisfaz

$$U_i(x_i) \equiv q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) \geq q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

IC implica que

$$U_i(x_i) = \max_{z_i \in \mathcal{X}_i} \{q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)\}$$

– máximo de uma família de funções afins, portanto $U_i(x_i)$ é convexo.

Ao comparar os *payoffs* esperados do comprador i com z_i de transmissão da informação verdadeira (z_i) e da transmissão da informação x_i , obtemos:

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i),$$

então $q_i(x_i)$ é a inclinação da linha que “suporta” $U_i(x)$ em x_i .

U_i é convexo \rightarrow

U_i é absolutamente contínuo \rightarrow

U_i é diferenciável praticamente em qualquer lugar
($U'_i(x_i) = q_i(x_i)$ e então $q_i(x_i)$ é não decrescente) \rightarrow

U_i é a integral de sua derivada:

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i) dt_i.$$

Conclusão: O *payoff* esperado a um comprador em um mecanismo direto compatível com incentivo (Q, M) depende (até uma constante) apenas da regra de alocação Q.

Observe: IC $\Leftrightarrow q_i(x)$ é não decrescente.

5 Equivalência de Receitas

Proposição: (Equivalência de Receitas) Se o mecanismo direto (Q, M) é compatível com incentivo, então $\forall i, x_i$ o pagamento esperado é

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i.$$

Assim, os pagamentos esperados (e assim a receita esperada pelo vendedor) em quaisquer dois mecanismos IC com a mesma regra de alocação são equivalentes até uma constante.

Prova: $U_i(x_i) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$, $U_i(0) = -m_i(0)$.
Substitua.

5.1 Uma aplicação da Equivalência de Receitas

Considere um ambiente simétrico (iid).

No leilão de segundo preço

$$\beta^{\text{II}}(x) = x.$$

e

$$m^{\text{II}}(x) = G(x) \times E[Y_1 | Y_1 < x].$$

No leilão de primeiro preço, como

$$m^{\text{I}}(x) = G(x) \times b(x)$$

obtemos

$$\beta^{\text{I}}(x) = E[Y_1 | Y_1 < x]$$

No leilão em que todos pagam

$$m^{\text{A}}(x) = \beta^{\text{A}}(x) = G(x) \times E[Y_1 | Y_1 < x].$$

6 Racionalidade individual

O mecanismo direto (Q, M) é individualmente racional (IR) se $\forall i, x_i$,

$$U_i(x_i) \geq 0.$$

Corolário: Se o mecanismo (Q, M) for IC , então ele é IR se, para todos os compradores, $U_i(0) \geq 0$ (ou $m_i(0) \leq 0$).

7 Mecanismos ótimos

Considere o mecanismo direto (Q, M).

A receita esperada para o vendedor é

$$\begin{aligned} E[R] &= \sum_{i \in \mathcal{N}} E[m_i(X_i)], \text{ onde} \\ E[m_i(X_i)] &= \int_0^{\omega_i} m_i(x_i) f_i(x_i) dx_i \\ &= m_i(0) + \int_0^{\omega_i} q_i(x_i) x_i f_i(x_i) dx_i \\ &\quad - \int_0^{\omega_i} \int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dt_i dx_i. \end{aligned}$$

O último termo é igual a (com a mudança de variáveis de integração)

$$\int_0^{\omega_i} \int_{t_i}^{\omega_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dx_i dt_i = \int_0^{\omega_i} (1 - F_i(t_i)) q_i(t_i) dt_i.$$

Substituindo novamente

$$\begin{aligned}
& E[m_i(X_i)] \\
= & m_i(0) + \int_0^{\omega_i} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) q_i(x_i) f_i(x_i) dx_i \\
= & m_i(0) + \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

O mecanismo ótimo maximiza $E[R]$ sujeito a: IC e IR .

8 Solução

Defina a avaliação virtual de um comprador com valor x_i como

$$\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)}.$$

O vendedor então deve escolher (Q, M) para maximizar

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} m_i(0) + \int_{\mathcal{X}} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}} \psi_i(x_i) Q_i(\mathbf{x}) \right) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Observe $\sum_{i \in \mathcal{N}} \psi_i(x_i) Q_i(\mathbf{x})$. É melhor atribuir os pesos mais altos $Q_i(x)$ ao maximal $\psi_i(x_i)$

O desenho do problema é regular se para $\forall i, \psi_i(\cdot)$ for uma função crescente de x_i .

A regularidade implicaria compatibilidade com incentivos do mecanismo ótimo.

A seguir está o mecanismo ótimo (Q, M):

- Regra de alocação Q:

$$Q_i(\mathbf{x}) > 0 \iff \psi_i(x_i) = \max_{j \in N} \psi_j(x_j) \geq 0.$$

($q_i(x_i)$ é não decrescente se $\psi_i(x_i)$ também o for, então temos IC.)

- Regra de pagamento M: (implicada por IC e IR)

$$M_i(\mathbf{x}) = Q_i(\mathbf{x})x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i})dz_i.$$

($M_i(0, x_{-i}) = 0$ para todo x_{-i} , e assim $m_i(0) = 0$, então temos IR.)

Defina

$$y_i(\mathbf{x}_{-i}) = \left\{ \inf z_i : \psi_i(z_i) \geq 0 \text{ e } \psi_i(z_i) \geq \max_{j \neq i} \psi_j(x_j) \right\}$$

— o menor valor para i que “ganha” de x_{-i} .

Assim,

$$Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{if } z_i > y_i(\mathbf{x}_{-i}), \\ 0, & \text{if } z_i < y_i(\mathbf{x}_{-i}). \end{cases}$$

Temos

$$\int_0^{x_i} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) = \begin{cases} x_i - y_i(\mathbf{x}_{-i}), & \text{se } z_i > y_i(\mathbf{x}_{-i}), \\ 0, & \text{se } z_i < y_i(\mathbf{x}_{-i}). \end{cases}$$

e assim,

$$M_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} y_i(\mathbf{x}_{-i}), & \text{se } Q_i(\mathbf{x}) = 1, \\ 0, & \text{se } Q_i(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

Proposição: Suponha que o desenho do problema seja regular e simétrico. Então um leilão de segundo preço com preço de reserva $r^* = \psi^{-1}(0)$ é um mecanismo ótimo.