

# Aprendizagem 5

## Ajuste com ruído persistente

(Kandori, Mailath, Rob)

*Sergei Izmalkov e Muhamet Yildiz*

### 1. Processo de Ajuste

#### 1.1 Jogo

- $N$  – população.
- Jogo simétrico 2 x 2.  $(A, B)$  – ações.
- Suponha que há 3 NE:  
 $(A, A)$ ;  $(B, B)$ ;  $(\alpha^* A + (1 - \alpha^*) B, \alpha^* A + (1 - \alpha^*) B)$ .
- Suponha que  $\alpha^* < \frac{1}{2} \Rightarrow (A, A)$  – NE risco dominante.

	A	B
A	2,2	0,0
B	0,0	1,1

Aqui  $\alpha^* = \frac{1}{3}$ .

## 1.2 Espaço do estado

- $\theta_t \in \Theta = [0, \dots, N]$  — número de jogadores utilizando A.
- Denote que
$$u_A(\theta_t) = \frac{\theta_t}{N}u(A, A) + \frac{N - \theta_t}{N}u(A, B); \quad u_B(\theta_t) = \dots$$

## 1.3 Processo determinístico

- Dinâmica “darwiniana”:  $\theta_{t+1} = P(\theta_t)$ , onde
$$\text{sgn}(P(\theta_t) - \theta_t) = \text{sgn}(u_A(\theta_t) - u_B(\theta_t)).$$
- $\text{Ex}^0$ : dinâmica de melhor resposta:

$$\theta_{t+1} = BR(\theta_t) = \begin{cases} N, & \text{for } u_A(\theta_t) > u_B(\theta_t), \\ \theta_t, & \text{for } u_A(\theta_t) = u_B(\theta_t), \\ 0, & \text{for } u_A(\theta_t) < u_B(\theta_t). \end{cases}$$

## 1.4 Ruído

- $2\varepsilon$  — probabilidade que um jogador “mude” (é substituído) (\*após sua escolha intencional), independente entre jogadores.
- Note: mesmo se apenas 1 jogador “conscientemente” ajusta uma vez, há uma probabilidade positiva de que a população inteira se transforme de uma vez.
- Claramente  $P^\varepsilon$  é ergódico.

## 1.5 Distribuição de limitação (em $Ex^0$ )

- $N^*$  é  $\arg \min_m (m > N\alpha^*)$ ;
- $BR(\theta_t \geq N^*) = A$ ;
- $D_A = \{\theta \geq N^*\}$ ,  $D_B = \{\theta < N^*\}$ .
- Apenas as bacias de atração importam: uma jogada intencional depende de qual dos dois estados  $\theta_t$  está e não do próprio  $\theta_t$ .

## 2. Resultado

Proposição: Se  $N$  é suficientemente grande para que  $N^* < \frac{N}{2}$ , então o limite  $\varphi^*$  de distribuições invariantes coloca um ponto de massa em  $\theta_t = N^*$  correspondendo a todos os participantes jogando A.

Prova:

1. Para quaisquer  $\theta_t \in D_A$  ( $\in D_B$ ) a distribuição de probabilidade  $P^\varepsilon(\theta_t)$  é a mesma – o problema pode ser reduzido a dois estados.

2. Defina

$$\begin{aligned} q_{BA} &= \Pr(\theta_{t+1} \in D_B | \theta_t \in D_A); \\ q_{AB} &= \Pr(\theta_{t+1} \in D_A | \theta_t \in D_B). \end{aligned}$$

3. Resolva

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - q_{AB} & q_{AB} \\ q_{BA} & 1 - q_{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

e encontre

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{q_{BA}}{q_{AB}}.$$

4. Tome  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  of  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ .

Para mudar  $A \text{ @ } B$ , são necessárias pelo menos as mutações  $N - N^*$  em  $B$ ; para  $B \text{ @ } A$  devem acontecer pelo menos as mutações  $N^*$ :

$$q_{BA} \approx \binom{N}{N^*} \varepsilon^{N-N^*} (1-\varepsilon)^{N^*};$$

$$q_{AB} \approx \binom{N}{N^*} \varepsilon^{N^*} (1-\varepsilon)^{N-N^*}.$$

Assim,  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 3. Resumo

- Seleção de equilíbrio risco-dominante como o único de estado estável a longo prazo em jogos 2 x 2 (quase todos os modelos).
- Os procedimentos de “aprendizagem” tendem a selecionar equilíbrios que sejam relativamente robustos a mutações – diferente da eficiência de Pareto.

	A	B
A	2,2	$-a, 0$
B	$0, -a$	1,1

$(B, B)$  é risco-dominante se  $1 + a > 2$ .

- Probabilidades (taxas delas) de escapar das bacias de matérias atrativas.

## 4. Interação local (Ellison)

- Se o sistema inicia próximo a um equilíbrio “errado” o tempo esperado de ajuste pode ser bem grande.

No modelo KMR: a probabilidade de escapar é  $\approx \varepsilon^{N^*}$ .

- Objetivo: explicar porque processos de ajuste estocástico podem selecionar o equilíbrio de risco-dominante em um período de tempo economicamente relevante.
- Jogadores localizados no círculo e interagindo apenas com vizinhos.
- O jogador seleciona uma ação e é equiparado aleatoriamente com um dos dois vizinhos.
- Observação: o par de As adjacentes vence a população.

### 4.1 Processo de ajustamento

1. Jogo simétrico 2 x 2.  $(A, B)$  – ações.
2.  $\Theta = \{A, B\}^N$ .
3. Processo determinístico: jogador com A troca seus vizinhos para A.  
  
Estados estáveis “Todo A”, “Todo B”, “A B A B...- B A B A...” ciclo.
4. Ruído: probabilidade  $2\varepsilon$  de transformação.
5. Distribuição de limitação: “Todo ‘A’”,

Convergência: custo mínimo de transição de “todo B” é 2 se  $N$  for par e é 1 se  $N$  for ímpar. (número de transformações que leva para trocar para “todo A”.)