

Outono de 2001

# Sinopse da Teoria da Escolha

Esta nota resume os elementos da teoria da utilidade esperada. Para uma exposição em detalhes dos quatro primeiros tópicos, consulte Kreps (1988); para o último parágrafo, consulte Savage (1954). Primeiramente vamos definir uma função de escolha e apresentar as condições necessárias e suficientes que uma função de escolha deve satisfazer a fim de ser representada por uma relação de preferência – preferências reveladas. Nós então apresentaremos as condições necessárias e suficientes que uma relação de preferência deve satisfazer a fim de ser representada por uma função de utilidade – representação ordinal. Em seguida, apresentaremos as teorias de utilidade esperada de Von Neumann e Morgenstern, de Anscombe e Auman e de Savage, em que a função de utilidade representante toma forma de valor esperado – representação cardinal.

## 1. Preferências Reveladas

Consideremos um conjunto  $X$  de alternativas. As alternativas são mutuamente exclusivas no sentido de que não se pode escolher duas alternativas distintas ao mesmo tempo. Tomemos também o conjunto exaustivo de alternativas viáveis para que as escolhas do jogador sejam sempre definidas.

**Definição 1** Por uma função de escolha, queremos dizer uma função  $c : 2^X \setminus \{\emptyset\} \rightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$  tal que

$$c(A) \subseteq A \text{ para cada } A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}.$$

Aqui,  $c(A)$  consiste nas alternativas que o agente *pode* escolher se ele estiver restringido a  $A$ ; ele irá escolher apenas uma delas. Note que se assume que  $c(A)$  é um conjunto não-vazio.

Nossa segunda construção é uma relação de preferência. Tome uma relação  $\succeq$  em  $X$ , ou seja, um subconjunto de  $X \times X$ . Diz-se que uma relação  $\succeq$  é completa se, e somente se, dados quaisquer  $x, y \in X$ , seja  $x \succeq y$  ou  $y \succeq x$ . Diz-se que uma relação  $\succeq$  é transitiva se, e somente se, dados quaisquer  $x, y, z \in X$ ,

$$[x \succeq y \text{ e } y \succeq z] \Rightarrow x \succeq z.$$

**Definição 2** Uma relação é uma relação de preferência se, e somente se, for completa e transitiva.

Dada qualquer relação de preferência  $\succeq$ , nós podemos definir preferência restrita  $\succ$  por

$$x \succ y \Leftrightarrow [x \succeq y \text{ e } y \not\succeq x],$$

e a indiferença  $\sim$  por

$$x \sim y \Leftrightarrow [x \succeq y \text{ e } y \succeq x].$$

Agora considere a função de escolha  $c(\cdot; \succeq)$  de uma agente que queira escolher a melhor alternativa disponível com relação a uma relação de preferência  $\succeq$ . Essa função é definida por

$$c(A; \succeq) = \{x \in A \mid x \succeq y \quad \forall y \in A\}.$$

Note que, uma vez que  $\succeq$  for completo e transitivo,  $c(A; \succeq) \neq \emptyset$  sempre que  $A$  for finito. Considere um conjunto  $A$  com membros  $x$  e  $y$  tal que nosso agente possa escolher  $x$  de  $A$  (ou seja,  $x \succeq y$ ). Considere também um conjunto  $B$  do qual ele possa escolher  $y$  (ou seja,  $y \succeq z$  para cada  $z \in B$ ). Agora, se  $x \in B$ , então ele também pode escolher  $x$  de  $B$  (ou seja,  $x \succeq z$  para cada  $z \in B$ ). Isto é,  $c(\cdot; \succeq)$  satisfaz o seguinte axioma de Houthakker:

**Axioma 1** (Houthakker) Dados quaisquer  $A, B$  com  $x, y \in A \cap B$ , se  $x \in c(A)$  e  $y \in c(B)$ , então  $x \in c(B)$ .

Verifica-se que qualquer função de escolha  $c$  que satisfaça o axioma de Houthakker pode ser considerada vinda de um agente que tenta escolher a melhor alternativa disponível com respeito a alguma relação de preferência  $\succeq_c$ . Tal relação de preferência pode ser definida

$$x \succeq_c y \Leftrightarrow x \in c(\{x, y\}).$$

**Teorema 1** Se  $\succeq$  é uma relação de preferência, então  $c(\cdot; \succeq)$  satisfaz o axioma de Houthakker. Inversamente, se uma função de escolha  $c$  satisfaz o axioma de Houthakker, então há uma relação de preferência  $\succeq$  tal que  $c = c(\cdot; \succeq)$ .

## 2. Representação Ordinal

Estamos interessados em relações de preferência que possam ser *representadas* por uma função de utilidade  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  no seguinte sentido:

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \quad \forall x, y \in X. \quad (\text{RO})$$

Claramente, quando o conjunto  $X$  de alternativas é contável, qualquer relação de preferência pode ser representada nesse sentido. O teorema a seguir afirma adiante que uma relação precisa ser uma relação de preferência a fim de que possa ser representada por uma função de utilidade.

**Teorema 2** *Seja  $X$  finito (ou contável). Uma relação  $\succeq$  pode ser representada por uma função de utilidade  $U$  no sentido de (RO) se, e apenas se,  $\succeq$  for uma relação de preferência. Além disso, se  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  representa  $\succeq$ , e se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função estritamente crescente, então  $f \circ U$  também representa  $\succeq$ .*

Pela última afirmação, nós chamamos tais funções de utilidade de ordinais.

Quando  $X$  for incontável, algumas relações de preferência podem não ser representadas por nenhuma função de utilidade, como as preferências lexicográficas em  $\mathbb{R}^2$ .<sup>1</sup> Se as preferências forem contínuas, elas podem ser representadas por uma função de utilidade (contínua) mesmo quando  $X$  for incontável.<sup>8</sup>

**Definição 3** *Seja  $X$  um espaço métrico. Diz-se que uma relação de preferência  $\succeq$  é contínua se, e somente se, dadas quaisquer duas seqüências  $(x_n)$  e  $(y_n)$  com  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ ,*

$$[x_n \succeq y_n \quad \forall n] \Rightarrow x \succeq y.$$

**Teorema 3** *Seja  $X$  um espaço métrico separável, tal como  $\mathbb{R}^n$ . Uma relação  $\succeq$  em  $X$  pode ser representada por uma função de utilidade contínua  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  no sentido de (RO) se, e somente se,  $\succeq$  for uma relação de preferência contínua.*

Quando um jogador escolhe entre suas estratégias, ele não sabe quais estratégias os outros jogadores escolheram, por isso não tem certeza quanto às conseqüências de seus atos (a saber, estratégias). Para analisar as decisões dos jogadores em um jogo, seria útil então ter uma teoria de tomada de decisão que nos permita expressar as preferências de um agente sobre os atos com conseqüências incertas (estratégias) em termos de sua atitude perante as conseqüências.

---

<sup>1</sup> De fato, é necessária alguma forma de enumeração para a representabilidade.  $X$  deve ser separável com relação à outra topologia de  $\succeq$ , isto é, deve conter um subconjunto contável que seja denso em relação à topologia de ordem. (Veja Teorema 3.5 em Kreps, 1988.)

### 3. Representação cardinal

Considere um conjunto finito  $Z$  de conseqüências (ou prêmios). Seja  $S$  o conjunto de todos os estados do mundo. Tome um conjunto  $F$  de atos  $f : S \rightarrow Z$  como o conjunto de alternativas (ou seja, conjunto  $X = F$ ). Cada estado  $s \in S$ , descreve todos os aspectos relevantes do mundo, por isso os estados são mutuamente exclusivos. Além disso, a conseqüência  $f(s)$  do ato  $f$  depende do real estado do mundo, assim o agente pode não ter certeza sobre as conseqüências de seus atos. Gostaríamos de representar a relação de preferência  $\succeq$  do agente em  $F$  por  $U : F \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$U(f) \equiv E[u \circ f]$$

(no sentido de (RO)) onde  $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$  é uma “função de utilidade” em  $Z$  e  $E$  é um operador de expectativa em  $S$ . Isto é, nós queremos

$$f \succeq g \iff U(f) \equiv E[u \circ f] \geq E[u \circ g] \equiv U(g). \quad (\text{EUR})$$

Na formulação de Von Neumann e Morgenstern, a distribuição de probabilidade (e portanto o operador de expectativa  $E$ ) é dado objetivamente. De fato, eles formulam atos como loterias, isto é, distribuições de probabilidade em  $Z$ . Em tal mundo, eles caracterizam as condições (em  $\succeq$ ) sobre qual  $\succeq$  é representável no sentido de (EUR).

Para os casos que nos interessam, não há objetividade dada a distribuição de probabilidade em  $S$ . Por exemplo, a chance de estratégias que serão jogadas pelos outros jogadores não é objetivamente dada. Nós portanto precisamos determinar as avaliações de probabilidade (subjativa) do agente em  $S$ .

Anscombe e Aumann desenvolveram um modelo tratável no qual as avaliações de probabilidade subjativa do agente são determinadas utilizando suas atitudes perante as loterias (com probabilidades objetivamente dadas) assim como perante os atos com conseqüências incertas. Para fazer isso, eles consideram as preferências dos agentes no conjunto  $P^S$  de todos os “atos” cujos resultados sejam loterias em  $Z$ , onde  $P$  é o conjunto de todas as loterias (distribuição de probabilidades em  $Z$ ).

Nesse arranjo, é direta a determinação das avaliações de probabilidade do agente. Considere um subconjunto  $A$  de  $S$  e quaisquer duas conseqüências  $x, y \in Z$  com  $x \succ y$ . Considere o ato  $f_A$  que produza a loteria certa de  $x$  em  $A$ ,<sup>2</sup> e a loteria certa de  $y$  em  $S \setminus A$ . (ver Figura 1.)

---

<sup>2</sup> Isto é,  $f_A(s) = \delta_x$  sempre que  $s \in A$  onde  $\delta_x$  atribui a probabilidade 1 ao resultado  $x$ .

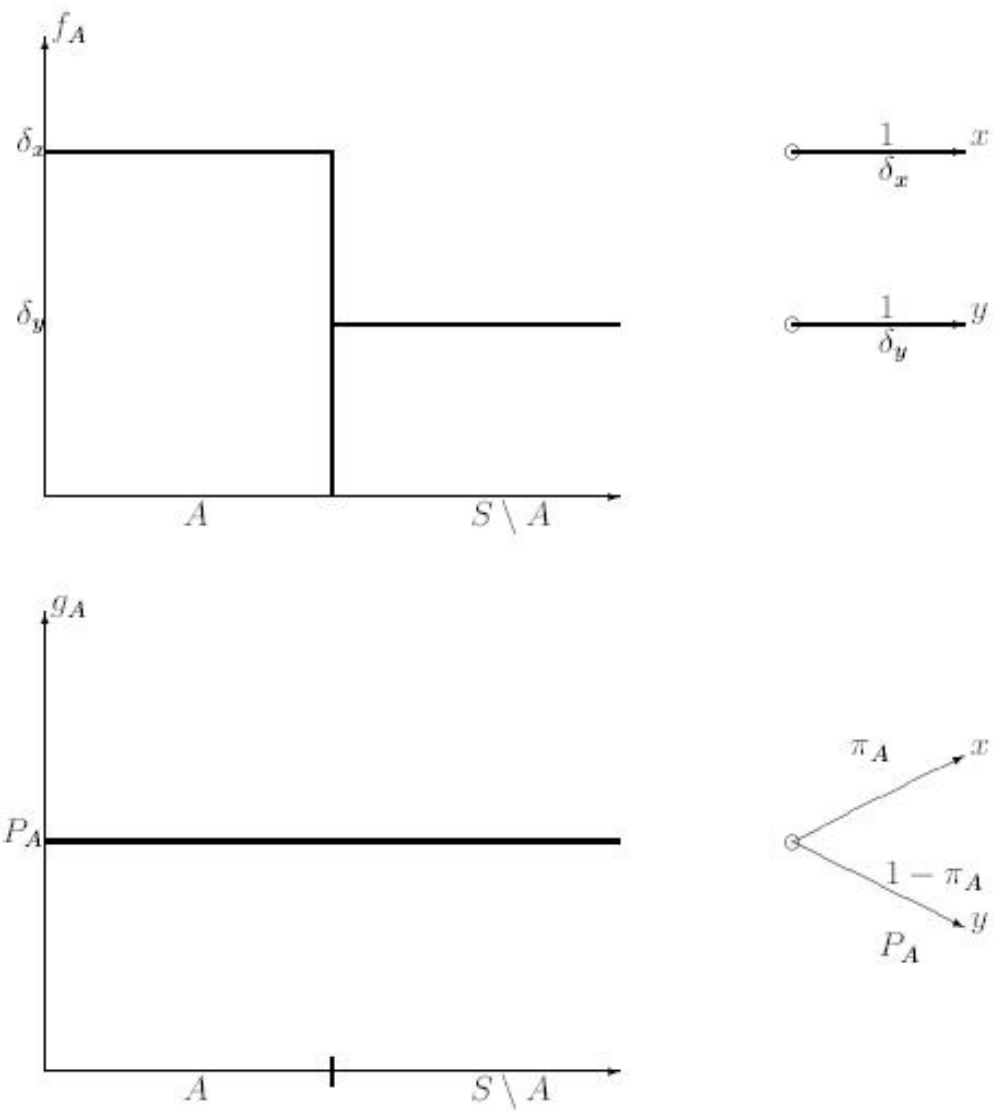


Figura 1: Figura para Anscombe e Aumann

Sob as suficientes hipóteses de continuidade (que também são necessárias para a representabilidade), existe  $p_A \in [0, 1]$  tal que o agente seja indiferente entre  $f_A$  e o ato  $g_A$  que sempre produz a loteria  $p_A$  que dá  $x$  com probabilidade  $p_A$  e  $y$  com probabilidade  $1 - p_A$ . Então,  $p_A$  é a probabilidade (subjéitiva) que o agente atribui ao evento  $A$  - sob a hipótese de que  $\pi_A$  não depende de quais alternativas  $x$  e  $y$  são usadas. Dessa maneira, nós obtemos uma distribuição de probabilidade em  $S$ . Utilizando a teoria de Von Neumann e Morgenstern, nós então obtemos um teorema de representação nesse espaço estendido onde temos tanto incerteza subjéitiva como risco objetivamente fornecido.

Savage desenvolve uma teoria com incerteza puramente subjéitiva. Sem utilizar nenhuma probabilidade objetivamente dada, sob certas hipóteses de “rigidez”, ele deriva uma única distribuição de probabilidade em  $S$  que representa as crenças do agente fixadas em suas preferências, e então, utilizando a teoria de Von Neumann e Morgenstern, ele obtém um teorema de representação – no qual tanto a função de utilidade como as crenças são derivadas das preferências.

Agora vamos apresentar as teorias de Von Neumann e Morgenstern e Savage.

## 4. Von Neumann e Morgenstern

Consideramos um conjunto finito  $Z$  de prêmios, e o conjunto  $P$  de todas as distribuições de probabilidade  $p : Z \rightarrow [0,1]$  em  $Z$ , onde  $\sum_{z \in Z} p(z) = 1$ . Nós chamamos essas distribuições de probabilidade de loterias. Gostaríamos de ter uma teoria que construa as preferências de um jogador nas loterias a partir de suas preferências nos prêmios. Diz-se que uma relação de preferência  $\succeq$  em  $P$  é representada por uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern  $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,

$$p \succeq q \iff U(p) \equiv \sum_{z \in Z} u(z)p(z) \geq \sum_{z \in Z} u(z)q(z) \equiv U(q) \quad (1)$$

para cada  $p, q \in P$ . Note que  $U : P \rightarrow \mathbb{R}$  representa  $\succeq$  no sentido ordinal. Isto é, o agente age como se quisesse maximizar o valor esperado de  $u$ .

As condições necessárias e suficientes para uma representação como em (1) são as seguintes:

**Axioma 2**  $\succeq$  seja completo e transitivo.

Isto é necessário pelo Teorema 2, pois  $U$  representa  $\succeq$  no sentido ordinal. A Segunda condição é chamada axioma de *independência*, afirmando que a preferência de um jogador entre duas loterias  $p$  e  $q$  não muda se jogarmos uma moeda e dermos a ele uma loteria fixa  $r$  se a “coroa” aparecer.



Figura 2: Duas loterias

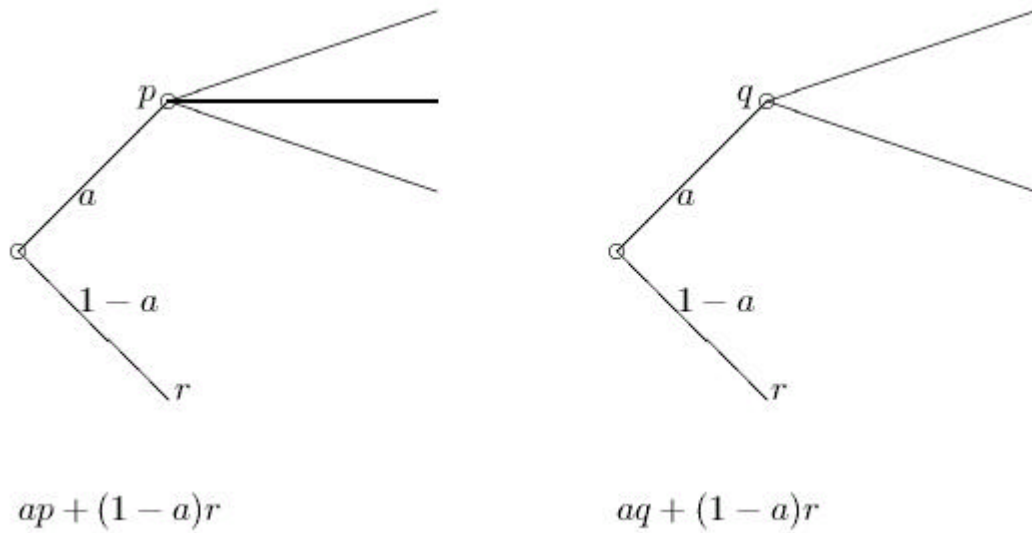


Figura 3: Duas loterias compostas

**Axioma 3** Para qualquer  $p, q, r \in P$ , e qualquer  $a \in [0,1]$ ,  $ap + (1-a)r \succ aq + (1-a)r \Leftrightarrow p \succ q$ .

Seja  $p$  e  $q$  as loterias representadas na Figura 2. Então, as loterias  $ap + (1-a)r$  e  $aq + (1-a)r$  podem ser representadas como na Figura 3, onde nós jogamos uma moeda entre uma loteria fixada  $r$  e nossas loterias  $p$  e  $q$ . O axioma 3 estipula que o agente não mudaria de idéia após a moeda ter sido jogada. Portanto, nosso axioma pode ser tomado com um axioma de “consistência dinâmica” nesse sentido.

A terceira condição é o axioma de *continuidade*. Ele afirma que não há prêmios “infinitamente bons” ou “infinitamente maus”. [É necessário algum grau de continuidade também para a representação ordinal.]

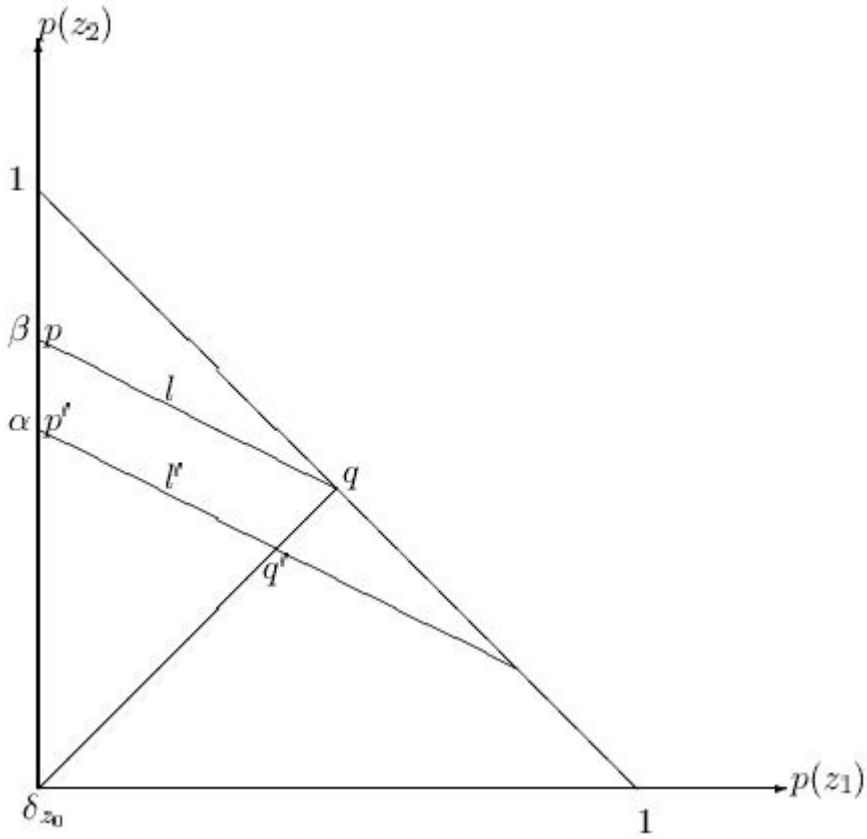


Figura 4: curvas de indiferença no espaço de loterias

**Axioma 4** Para qualquer  $p, q, r \in P$ , se  $p \succ q \succ r$ , então existe  $a, b \in (0, 1)$  tal que  $ap + (1-a)r \succ q \succ bp + (1-r)r$ .

Os axiomas 3 e 4 implicam que, dados quaisquer  $p, q, r \in P$  e qualquer  $a \in [0,1]$ ,

$$\text{Se } p \sim q, \text{ então } ap + (1-a)r \sim aq + (1-a)r. \quad (2)$$

Isto tem duas implicações:

1. As curvas de indiferença nas loterias são linhas retas.
2. As curvas de indiferença, que são linhas retas, são paralelas umas às outras.



Para ilustrar esses fatos, considere três prêmios  $z_0, z_1$  e  $z_2$ , onde  $z_2 \succ z_1 \succ z_0$ .

Uma loteria  $p$  pode ser representada em um plano tomando-se  $p(z_1)$  como a primeira coordenada (no eixo horizontal), e  $p(z_2)$  como a segunda coordenada (no eixo vertical).  $p(z_0)$  é  $1 - p(z_1) - p(z_2)$ . [Ver Figura 4 para ilustração.] Dadas quaisquer duas loterias  $p$  e  $q$ , as combinações convexas  $ap + (1 - a)q$  com  $a \in [0,1]$  formam o segmento de linha conectando  $p$  a  $q$ . Agora, tomando  $r = q$ , nós podemos deduzir de (2) que, se  $p \sim q$ , então  $ap + (1 - a)q \sim aq + (1 - a)q = q$  para cada  $a \in [0,1]$ . Isto é, o segmento de linha conectando  $p$  a  $q$  é uma curva de indiferença. Além disso, se as linhas  $l$  e  $l'$  são paralelas, então  $\alpha/\beta = |q'|/|q|$ , onde  $|q|$  e  $|q'|$  são as distâncias de  $q$  e  $q'$  da origem, respectivamente. Por isso, tomando  $a = \alpha/\beta$ , nós computamos que  $p' = ap + (1 - a)\delta_{z_0}$  e  $q' = aq + (1 - a)\delta_{z_0}$ , onde  $\delta_{z_0}$  é a loteria na origem, e dá  $z_0$  com probabilidade 1. Portanto, por (2), se  $l$  é uma curva de indiferença,  $l'$  é também uma curva de indiferença, mostrando que as curvas de indiferença são paralelas.

A linha  $l$  pode ser definida pela equação  $u_1p(z_1) + u_2p(z_2) = c$  para algum  $u_1, u_2, c \in \mathbb{R}$ . Uma vez que  $l'$  é paralela a  $l$ ,  $l'$  também pode ser definido pela equação  $u_1p(z_1) + u_2p(z_2) = c'$  para algum  $c'$ . Uma vez que as curvas de indiferença são definidas pela igualdade  $u_1p(z_1) + u_2p(z_2) = c$  para vários valores de  $c$ , as preferências são representadas por

$$\begin{aligned} U(p) &= 0 + u_1p(z_1) + u_2p(z_2) \\ &\equiv u(z_0)p(z_0) + u(z_1)p(z_1) + u(z_2)p(z_2), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} u(z_0) &= 0, \\ u(z_1) &= u_1, \\ u(z_2) &= u_2, \end{aligned}$$

dando a desejada representação.

Isso é verdade em geral, conforme afirmado no próximo teorema:

**Teorema 4** *Uma relação  $\succeq$  pode ser representada por uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern  $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$  como em (1) se, e somente se,  $\succeq$  satisfaça os axiomas 2-4. Além disso,  $u$  e  $\tilde{u}$  representam a mesma relação de preferência se, e apenas se,  $\tilde{u} = au + b$  para um  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ .*

Pela última afirmação de nosso teorema, essa representação é "única até as transformações afins". Isto é, as preferências de um agente não mudam quando nós mudamos sua função de utilidade von Neumann-Morgenstern (VNM) multiplicando-a por um número positivo, ou adicionando-a a uma constante; mas mudam quando a transformamos por meio de uma transformação não-linear. Nesse sentido, esta representação é "cardinal". Lembre que, na representação ordinal, as preferências não mudariam mesmo se a transformação fosse não-linear, contanto que fosse crescente.

## 5. Savage

Tome um conjunto  $S$  de estados  $s$  do mundo, um conjunto finito  $Z$  de conseqüências  $(x, y, z)$ , e tome o conjunto  $F = Z^S$  de atos  $f: S \rightarrow Z$  como um conjunto de alternativas. Fixe uma relação  $\succeq$  em  $F$ . Gostaríamos de encontrar condições suficientes e necessárias em  $\succeq$  para que  $\succeq$  possa ser representado por algum  $U$  no sentido de (EUR); isto é,  $U(f) = E[u \circ f]$ . Nessa representação, tanto a função de utilidade  $u: Z \rightarrow \mathbb{R}$  e a distribuição de probabilidade  $p$  em  $S$  (que determina  $E$ ) são derivadas de  $\succeq$ . Os teoremas 2 e 3 nos dão a primeira condição necessária:

**P1**  $\succeq$  seja uma relação de preferência.

A segunda condição é a peça central da teoria de Savage:

**O Princípio da Certeza** *Se um agente prefere um ato  $f$  a um ato  $g$  quando ele sabe que um evento  $A \subseteq S$  ocorre, e se ele prefere  $f$  a  $g$  quando ele sabe que  $A$  não ocorre, então ele deve preferir  $f$  a  $g$  quando ele não sabe se  $A$  ocorre ou não. Essa é a definição informal do princípio da certeza. Quando nós determinamos as avaliações de probabilidade do agente, isso nos dará o axioma independente, Axioma 3, de von Neumann e Morgenstern. A seguinte formulação de Savage, P2, não apenas implica essa afirmação informal, mas também nos permite afirmar isso formalmente, ao nos permitir definir preferências condicionais. (As preferências condicionais também são usadas para definir as crenças.)*

**P2** Seja  $f, f', g, g' \in F$  and  $B \subseteq S$  tais que

$$f(s) = f'(s) \text{ e } g(s) = g'(s) \text{ a cada } s \in B$$

e

$$f(s) = f'(s) \text{ e } g(s) = g'(s) \text{ a cada } s \notin B$$

Se  $f \succeq g$ , então  $f' \succeq g'$ .

**Preferências condicionais** Utilizando P2, nós podemos definir as preferências condicionais como a seguir. Dados quaisquer  $f, g, h \in F$  e  $B \in S$ , defina atos  $f|_B$  e  $g|_B$  por

$$f|_B(s) = \begin{cases} f(s) & \text{Se } s \in B \\ h(s) & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

e

$$g|_B(s) = \begin{cases} g(s) & \text{Se } s \in B \\ h(s) & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Isto é,  $f|_B$  e  $g|_B$  concordam com  $f$  e  $g$ , respectivamente, em  $B$ , mas quando  $B$  não ocorre, eles produzem o mesmo ato padrão  $h$ .

**Definição 4 (Preferências Condicionais)**  $f \succeq g$  dados  $B$  se  $f|_B \succeq g|_B$ .

P2 garante que  $f \succeq g$  dados  $B$  está bem definido, isto é, não depende do ato padrão  $h$ . Para ver isso, tome qualquer  $h' \in F$ , e defina  $f|_B^{h'}$  e  $g|_B^{h'}$  de acordo. Verifique que

$$f|_B(s) \equiv f(s) \equiv f|_B^{h'}(s) \text{ e } g|_B(s) \equiv g(s) \equiv g|_B^{h'}(s) \text{ para cada } s \in B$$

e

$$f|_B(s) \equiv h(s) \equiv g|_B(s) \text{ e } f|_B^{h'}(s) \equiv h'(s) \equiv g|_B^{h'}(s) \text{ para cada } s \notin B.$$

Portanto, por P2,  $f|_B \succeq g|_B$  se  $f|_B^{h'} \succeq g|_B^{h'}$ .

Note que P2 afirma precisamente que  $f \succeq g$  dado  $B$  está bem definido. Para ver isso, tome  $f$  e  $g'$  arbitrariamente. Determine  $h = f$  e  $h' = g'$ . Claramente,  $f = f|_B$  e  $g' = g|_B^{h'}$ . Além disso, as condições em P2 definem  $f'$  e  $g$  como  $f' = f|_B^{h'}$  e  $g = g|_B$ . Assim a conclusão de P2, “se  $f \succeq g$ , então  $f' \succeq g'$ ”, é a mesma como “se  $f|_B \succeq g|_B$ , então  $f|_B^{h'} \succeq g|_B^{h'}$ ”.

**Exercício 1** Mostre que a afirmação informal do princípio da certeza é formalmente verdadeiro, dados qualquer  $f_1, f_2 \in F$ , e qualquer  $B \in S$ ,

$$[(f_1 \succeq f_2 \text{ dado } B) \text{ e } (f_1 \succeq f_2 \text{ dado } S \setminus B)] \Rightarrow [f_1 \succeq f_2].$$

[Dica: defina  $f := f_1 = f|_B = f|_{S \setminus B}^{f_1}$ ,  $g' := f_2 = f|_B^{f_2} = f|_{S \setminus B}^{f_2}$ ,  $f' := f|_B^{f_1} = f|_{S \setminus B}^{f_1}$ , e  $g := f|_B = f|_{S \setminus B}^{f_2}$ . Note que você não precisa invocar P2 (explicitamente).]

Lembre-se de que nosso objetivo é desenvolver uma teoria que relacione as preferências em atos com consequências incertas, com as preferências sobre as consequências. (A relação de preferência  $\succeq$  em  $F$  é estendida a  $Z$  embutindo-se  $Z$  em  $F$  como atos constantes. Isto é, nós dizemos que  $x \succeq x'$  se, e somente se,  $f \succeq f'$  onde  $f$  e  $f'$  são atos constantes que assumem valores  $x$  e  $x'$ , respectivamente). O próximo postulado faz isso para as preferências condicionais:

**P3** Dados quaisquer  $f, f' \in F$ ,  $x, x' \in Z$ , e  $B \in S$ , se  $f \circ x, f' \circ x',$  e  $B \neq \emptyset$ , então

$$f \succeq f' \text{ dado } B \iff x \succeq x'.$$

Para  $B = S$ , P3 é trivial, uma questão de definição de uma consequência como um ato constante. Quando  $B \neq S$ , P3 é necessário como um postulado independente. Como as preferências são definidas estabelecendo os resultados dos atos para o mesmo ato padrão quando o evento não ocorre, e dois atos constantes distintos não podem tomar o mesmo valor.

**Representando crenças com probabilidades qualitativas** Queremos determinar as crenças do nosso agente fixadas em  $\succeq$ . Para esse fim, dados quaisquer dois eventos  $A$  e  $B$ , nós queremos determinar qual evento nosso agente acha que é mais provável. Para fazer isso, vamos tomar quaisquer duas consequências  $x, x' \in Z$  com  $x \succ x'$ . É pedido ao nosso agente para escolher entre as duas jogadas (atos)  $f_A$  e  $f_B$  com

$$\begin{aligned} f_A(s) &= \begin{cases} x & \text{if } s \in A \\ x' & \text{Caso contrário} \end{cases} \\ f_B(s) &= \begin{cases} x & \text{if } s \in B \\ x' & \text{Caso contrário} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Se nosso agente prefere  $f_A$  a  $f_B$ , nós podemos inferir que ele considera  $A$  mais provável que o evento  $B$ , porque ele prefere levar o “prêmio” quando  $A$  ocorrer, a leva-lo quando  $B$  ocorrer.

**Definição 5** Tome qualquer  $x, x' \in Z$  com  $x \succ x'$ . Dados quaisquer  $A, B \in S$ , podemos dizer que  $A$  é pelo menos tão provável quanto  $B$  (e escreva  $A \succeq B$ ) se, e somente se,  $f_A \succeq f_B$ , onde  $f_A$  e  $f_B$  são definidos por (3).

Nós queremos ter certeza de que isso nos dará crenças bem definidas. Isto é, não deveria ser o caso que, quando utilizamos um  $x$  e  $x'$ , inferimos que o agente considere  $A$  estritamente mais provável que  $B$ , mas quando utilizamos algum outro  $y$  e  $y'$ , nós inferimos que ele considera  $B$  estritamente mais provável que  $A$ . Nossa próxima hipótese garante que  $\succeq$  está bem definido.

**P4** Dados quaisquer  $x, x', y, y' \in Z$  com  $x \succ x'$  e  $y \succ y'$ , defina  $f_A, f_B, g_A, g_B$  por

$$\begin{aligned} f_A(s) &= \begin{cases} x & \text{if } s \in A \\ x' & \text{Caso contrário} \end{cases}, & g_A(s) &= \begin{cases} y & \text{if } s \in A \\ y' & \text{Caso contrário} \end{cases} \\ f_B(s) &= \begin{cases} x & \text{if } s \in B \\ x' & \text{Caso contrário} \end{cases}, & g_B(s) &= \begin{cases} y & \text{if } s \in B \\ y' & \text{Caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$f_A \succeq f_B \iff g_A \succeq g_B.$$

Finalmente, tenha certeza de que podemos achar  $x$  e  $x'$  com  $x \succ x'$ :

**P5** Existe algum  $x, x' \in Z$  tal que  $x \succ x'$ .

Nós agora temos uma relação  $\succeq$  bem definida que determina qual dos dois eventos é mais provável. Verifica-se que  $\succeq$  é uma *probabilidade qualitativa*, definida a seguir:

**Definição 6** Diz-se que uma relação  $\succeq$  entre os eventos é uma *probabilidade qualitativa* se, e somente se:

1.  $\succeq$  for completo e transitivo;
2. dados quaisquer  $B, C, D \in S$  com  $B \cap D = C \cap D = \emptyset$ , temos

$$B \succeq C \iff B \cup D \succeq C \cup D;$$

3.  $B \succeq \emptyset$  para cada  $B \in S$ , e  $S \succ \emptyset$ .

**Exercício 2** Mostre que, sob os postulados P1-P5, a relação  $\succeq$  definida na Definição 5 é uma *probabilidade qualitativa*.

**Quantificando as avaliações de probabilidade qualitativa** Savage utiliza as medidas de probabilidade finitamente aditivas na sigma-álgebra discreta:

**Definição 7** Por uma medida de probabilidade, entende-se uma função  $p : 2^S \rightarrow [0, 1]$ , com

1. se  $B \cap C = \emptyset$ , então  $p(B \cup C) = p(B) + p(C)$ , e
2.  $p(S) = 1$ .

Nós gostaríamos de representar nossa probabilidade qualitativa  $\succeq$  com uma medida de probabilidade (quantitativa)  $p$  no sentido de que

$$B \succeq C \iff p(B) \geq p(C) \quad \forall B, C \subseteq S. \quad (\text{QPR})$$

**Exercício 3** Mostre que, se uma relação  $\succeq$  pode ser representada por uma medida de probabilidade, então  $\succeq$  deve ser uma probabilidade qualitativa.

Quando  $S$  é finito, uma vez que  $\succeq$  é completo e transitivo, pelo Teorema 2, pode ser representada por um função  $p$ , mas pode não haver nenhuma função que satisfaça a condição 1 na definição da medida de probabilidade. Além disso,  $S$  é tipicamente infinito. (Incidentemente, a teoria que se segue exige que  $S$  seja infinito.)

Estamos interessados nas preferências que podem ser consideradas vindas de um agente que avalia os atos com respeito a suas utilidades esperadas, utilizando uma função de utilidade em  $Z$  e uma medida de probabilidade em  $S$  que ele tenha em mente. Nossa tarefa a essa altura é achar a probabilidade  $p(B)$  que ele atribui a algum evento arbitrário  $B$ . Imagine que nós perguntemos a essa pessoa se  $p(B) \geq 1/2$ . Dependendo de sua resposta sincera, determinamos se  $p(B) \in [1/2]$  ou  $p(B) \in [0, 1/2]$ . Dado o intervalo, perguntamos se  $p(B)$  está na metade superior ou na metade inferior desse intervalo, e dependendo de sua resposta, nós obtemos um intervalo menor que contenha  $p(B)$ . Nós fazemos isso *ad infinitum*. Uma vez que o tamanho na  $n$ -ésima repetição é  $1/2^n$ , nós aprendemos  $p(B)$  no final. Por exemplo, digamos que  $p(B) = 0,77$ . Nós primeiro perguntamos se  $p(B) \geq 1/2$ . Ele responde que Sim. Nós agora perguntamos se  $p(B) \geq 3/4$ . Ele responde que Sim. Então perguntamos se  $p(B) \geq 7/8$ . Ele responde que Não. Agora, perguntamos se  $p(B) \geq 13/16 = (3/4 + 7/8)/2$ . Ele responde que Não novamente. Perguntamos agora se  $p(B) \geq 25/32 = (3/4 + 7/8)/2$ . Ele diz que Não. Então perguntamos se  $p(B) \geq 49/64$ . Ele responde que Sim agora. A essa altura nós sabemos que  $49/64 \equiv 0,765 \leq p(B) < 25/32 \equiv 0.781$ . Conforme continuemos a perguntar obteremos uma resposta melhor.

É isso o que nós faremos, ainda que em um arranjo muito abstrato. Tome  $S$  como *infinitamente divisível* sob  $\succeq$ . Isto é, que  $S$  tenha

- uma partição  $\{D_1^1, D_1^2\}$  com  $D_1^1 \cup D_1^2 = S$  e  $D_1^1 \sim D_1^2$ ,
- uma partição  $\{D_2^1, D_2^2, D_2^3, D_2^4\}$  com  $D_2^1 \cup D_2^2 = D_1^1$ ,  $D_2^3 \cup D_2^4 = D_1^2$ , e  $D_2^1 \sim D_2^2 \sim D_2^3 \sim D_2^4$ ,
- $\vdots$

- uma partição  $\{D_n^1, \dots, D_n^{2^n}\}$  com  $D_n^1 \cup D_n^2 = D_{n-1}^1, \dots, D_n^{2^{k-1}} \cup D_n^{2^k} = D_{n-1}^k, \dots$ , e  $D_n^1 \sim \dots \sim D_n^{2^n}$ ,

- $\vdots$

ad infinitum.

$S$			
$D_1^1$		$D_1^2$	
$D_2^1$	$D_2^2$	$D_2^3$	$D_2^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

**Exercício 4** Verifique que, se  $\succeq$  é representado por um  $p$ , então devemos ter  $p(D_n^r) = 1/2^n$ .

Dado qualquer evento  $B$ , para cada  $n$ , defina

$$k(n, B) = \max \left\{ r \mid B \supseteq \bigcup_{i=1}^r D_n^i \right\},$$

onde utilizamos a convenção que  $\bigcup_{i=1}^r D_n^i = \emptyset$  sempre que  $r < 1$ . Defina

$$p(B) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n, B)}{2^n}. \quad (4)$$

Prove que  $k(n, B)/2^n \in [0, 1]$  é não-decrescente em  $n$ . Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n, B)/2^n$  está bem definido.

Uma vez que  $\succeq$  é transitivo, se  $B \succeq C$ , então  $k(n, B) \geq k(n, C)$  para cada  $n$ , gerando  $p(B) \geq p(C)$ . Isso prova que a parte  $\Rightarrow$  de (QPR) sob a hipótese de que  $S$  é infinitamente divisível. A outra parte ( $\Leftarrow$ ) é implicada pela seguinte hipótese:

**P 6'** Se  $B \succ C$ , então há uma partição finita  $\{D^1, \dots, D^n\}$  de  $S$  tal que  $B \supsetneq C \cup D^r$  para cada  $r$ .

Sob P1-P5, a P6' também implica que  $S$  seja infinitamente divisível. (Ver a definição de “rígido” e os Teoremas 3 e 4 em Savage.) Portanto, P1-P6' implicam (QPR), onde  $p$  é definido por (4).

**Exercício 5** Verifique que, se  $\succeq$  é representado por algum  $p'$ , então

$$\frac{k(n, B)}{2^n} \leq p'(B) < \frac{k(n, B) + 1}{2^n}$$

a cada  $B$ . Por isso, se ambos  $p$  e  $p'$  representam  $\succeq$ , então  $p = p'$ .

O postulado 6 será um pouco mais forte do que P6'. (É também utilizado para obter o axioma da continuidade de von Neumann e Morgenstern.)

**P 6** Dados quaisquer  $x \in Z$ , e qualquer  $g, h \in F$  com  $g \succ h$ , existe uma partição  $\{D^1, \dots, D^n\}$  de  $S$  tal que

$$g \succ h_i^x \text{ e } g_i^x \succ h$$

para cada  $i \leq n$  onde

$$h_i^x(s) = \begin{cases} x & \text{if } s \in D^i \\ h(s) & \text{Caso contrário} \end{cases} \text{ e } g_i^x(s) = \begin{cases} x & \text{if } s \in D^i \\ g(s) & \text{Caso contrário} \end{cases}.$$

Tome  $g = f_B$  e  $h = f_C$  (definidos em (3)) para obter P6'.

**Teorema 5** Sob P1-P6, existe uma medida de probabilidade única  $p$  tal que

$$B \succeq C \iff p(B) \geq p(C) \quad \forall B, C \subseteq S. \quad (\text{QPR})$$

No capítulo 5, Savage mostra que, quando  $Z$  é finito, os Postulados P1-P6 implicam os Axiomas 2-4 de von Neumann e Morgenstern – tanto quanto suas hipóteses de modelagem como somente as distribuições de probabilidade na questão do conjunto de prêmios. Dessa forma, ele obtém o seguinte Teorema:<sup>3</sup>

**Teorema 6** Tome  $Z$  como finito. Sob P1-P6, há uma função de utilidade  $u : Z \rightarrow \mathbb{R}$  e uma medida de probabilidade  $p : 2^S \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$f \succeq g \iff \sum_{z \in Z} p(\{s | f(s) = z\}) u(z) \geq \sum_{z \in Z} p(\{s | g(s) = z\}) u(z)$$

para cada  $f, g \in F$ .

---

<sup>3</sup> Para o conjunto-prêmio infinito  $Z$ , nós precisamos da versão infinita do princípio da certeza :

**P 7** Se nós temos  $f \succeq g(s)$  dados  $B$  para cada  $s \in B$ , então  $f \succeq g$  dados  $B$ . Do mesmo modo, se  $f(s) \succeq g$  dados  $B$  para cada  $s \in B$ , então  $f \succeq g$  dados  $B$ .

Sob P1-P7, nós obtemos a representação de utilidade esperada para o caso geral.